Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Fehlerrechnung

- Verteilung von Messwerten
- Mittelwert
- Standardabweichung
- Standardfehler
- Runden von Messwerten
- Darstellung von Messwerten (Stellenzahl)
- Fehlerfortpflanzung

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Messergebnisse

Messung

physikalische Realität → Messgerät, das Ergebnisse einer Messung liefert

Messwert-Abweichung:

- **exakte** Messungen, z.B. wie viele Räder hat ein Auto
- **systematische** Fehler, z.B. durch schlecht eingestellte Messgeräte
  manchmal systematisch korrigierbar,
  z.B. wenn Messwert immer um einen festen Betrag zu groß
- **zufällige** Abweichungen bei wiederholter Messung (Messunsicherheit),
  da reelle Werte nur bis zu einer Genauigkeit ablesbar

→ **Fehlerrechnung** zur Behandlung dieser zufälligen Abweichungen

Stichwörter: Mittelwert, Standardabweichung, Standardfehler

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Verteilung der Messergebnisse

Beispiel: Messung der Körpergröße bei 1000 Jugendlichen, Anzahl für Intervalle von 2 cm

Messergebnisse liegen mehr oder weniger um 175 cm

→ Mittelwert.

Es gibt aber auch einige wenige, relativ kleine (150 – 152 cm) und einige große (190 – 192 cm)

→ Breite der Verteilung (Standardabweichung)

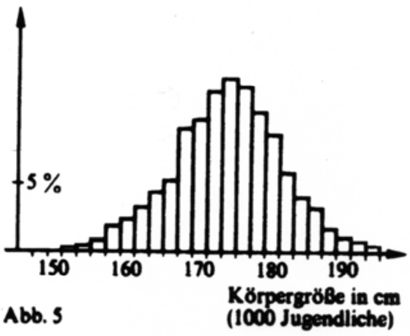


Abb. 5

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Mathematische Beschr

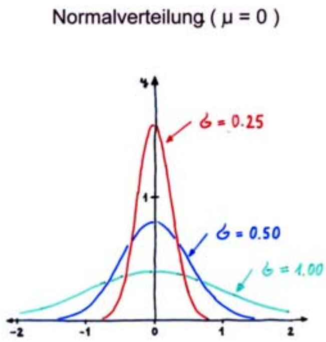
Absoluter Fehler = Messwert – wahı

im Allgem. sind weder der absolute Fehler noch

gesucht: **Abschätzung** für den Fehler

Beispiel: Messung ergibt – Brücke bricht bei ein
100 kN (entspricht Masse von 10 t) zus

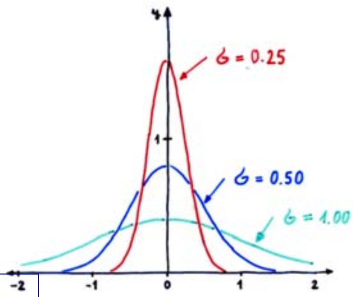
Frage: Wie genau ist unsere Messung? Auf 0.5
Also Gefahr ab 9.5 t oder bereits ab 5 t?



Wiederholte Messungen, z.B. Stichprobe vom Umfang *n*
(Messwerte: g_1, g_2, g_3, ... g_n) **streuen** im Allgem. um den wahren Wert.

Häufigkeitsverteilung der Messwerte bei zufälligen Abweichungen in Glockenform → **Normalverteilung**

Normalverteilung (μ = 0)



Mittelwert

Maximum der Verteilungskurve

liegt in der Nähe des wahren Wertes,
falls keine systematischen Fehler

Schätzwert für den wahren Wert:

arithmetischer Mittelwert
(für n Messungen: g_1, g_2, g_3, ... g_n)

$$\overline{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$$

Eine schmale Verteilungskurve erhält man bei geringer Streuung,
Maß für die Streuung: **Standardabweichung**
(mittlere Abweichung der Messwerte vom Mittelwert = Breite der Verteilung)

Taschenrechner !!!

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(gi - \overline{g})^2}$$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Messergebnis

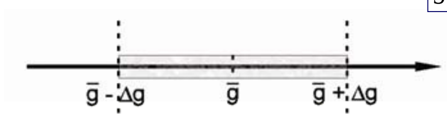
Standardfehler bei n Messungen

$$\Delta g = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Frage: Wie genau liegt der Mittelwert am wahren Wert?

Messergebnis = Mittelwert +/- Standardfehler

$$g = \overline{g} \pm \Delta g$$



Beispiel:
g = (2.0 +/- 0.5) m
d.h. Intervall zwischen
2.0 - 0.5 und 2.0 + 0.5

→ Unsicherheitsbereich um den Mittelwert

Im Intervall [*g*-Δ*g*, *g*+Δ*g*] liegen ca. 2/3 der Messwerte.

Relativer Fehler: $v := \Delta g / g$ (wird oft in Prozent angegeben)

Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts

Runden reeller Zahlen

Messergebnisse haben oft **reelle Maßzahlen**,
abgelesen mit einer gewissen Zahl von Stellen, z.B.

x = 0.3824 m

y = 0.1561 m

Zahl der angegebenen Stellen sagt etwas über die **Messgenauigkeit** aus,
man **rundet** den Messwert auf eine gewisse Stellenzahl, ab 5 auf, bis 4 ab,
z.B. bei nur zwei Nachkommastellen

x = 0.3824 m → x = 0.38 m

y = 0.1561 m → y = 0.16 m

Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts (2)

Aussage der Stellenzahl

Was ist der Unterschied zwischen dem Messwert
x = 0.3 m und x = 0.30 m ?

***x* = 0.3 m** ist das Ergebnis einer Rundung,
d.h. das Ergebnis vor der Rundung lag zwischen
0.25 m und 0.3499... m, d.h. die Aussage 0.3 m ist ***auf 0.1 m genau***.

***x* = 0.30 m** ist das Ergebnis einer Rundung,
d.h. das Ergebnis vor der Rundung lag zwischen
0.295 m und 0.30499... m, d.h. die Aussage 0.30 m ist ***auf 0.01 m genau***.

→ **die gewünschte Genauigkeit legt die Stellenzahl fest**.

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts (3)

Frage: Wie viele Stellen sollen es sein?

Antwort: Das hängt davon ab, wie groß der **Fehler Δg** ist

Ein Fehler Δg von 0.1 m liefert ein ungenaueres Ergebnis als Δg = 0.01 m

Wie genau, d.h. mit wie vielen Stellen, soll Δg angegeben werden?

Für Δg nimmt man 1 oder maximal 2 signifikante Stellen.

Signifikante Stellen: Zahl der Stellen, ohne die führenden Nullen, z.B.

1,2 → 2 signifikante Stellen

0,0012 → 2 signifikante Stellen

0,01 → 1 signifikante Stelle

0,010 → 2 signifikante Stellen, die letzte Null ist keine führende Null !

Δg beschreibt unser **Unwissen** zu *g*.
Die 1. bis max. 2. sign. Stelle legt die **Größenordnung** des Unwissens fest.

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts (4)

Frage: Wie viele Stellen soll der Mittelwert haben?

Antwort: Auch das hängt davon ab, wie groß der **Fehler Δg** ist

Ein Fehler Δg von 0.1 m liefert ein ungenaueres Ergebnis als Δg = 0.01 m

Mit wie vielen Stellen soll der Mittelwert angegeben werden?

Für g nimmt man genau so viele Nachkomma-Stellen wie für Δg.

Die **signifikanten Stellen von Δg** legen die Zahl der **Nachkomma-Stellen** sowohl von Δg als auch von *g* fest, z.B.

Δg = 0,012 m, also 2 signifikante Stellen, ergeben hier 3 Nachkomma-Stellen,

d.h. auch g muss mit 3 Nachkomma-Stellen angegeben werden,

z.B. *g* = 234,2457 m wird auf 3 Nachkomma-Stellen gerundet: 234,246 m

Damit erhalten wir als Messergebnis: *g* = (234,246 +/- 0,012) m

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts (5)

Weitere Beispiele:

Δg = 2 m, also 1 signifikante Stelle, ergibt hier keine Nachkomma-Stellen,
g = 234,2457 m wird auf keine Nachkomma-Stelle gerundet: 234 m
Messergebnis: g = (234 +/- 2) m

Δg = 0,0008 m, also 1 signifikante Stelle, ergibt hier 4 Nachkomma-Stellen,
g = 234,2457 m hat 4 Nachkomma-Stellen, braucht nicht gerundet zu werden
Messergebnis: g = (234,2457 +/- 0,0008) m

Δg = 100 m, also 3 signifikante Stellen, was nicht erlaubt ist (zu exakt)
Lösung: Man spaltet Zehnerpotenzen ab: Δg = 0,1 10^3 m = 0,1 km
g = 234,2457 m = 0,2342457 10^3 m, wird gerundet auf: 0,2 10^3 m
Messergebnis: g = (0,2 +/- 0,1) 10^3 m = (0,2 +/- 0,1) km **Wo ist das Komma?**

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Darstellung des Messwerts (6)

Fehlerhafte Darstellungen:

Messergebnis: g = (42 +/- 0.71043234) m

Messergebnis: g = (42.1234 +/- 5) m

Messergebnis: g = (42.12 +/- 0.7) m

Messergebnis: g = (42.1 +/- 0.71) m

Messergebnis: g = (42.1234 +/- 0.7104) m

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Fehlerfortpflanzung

Funktionen von Messwerten

Manchmal interessieren wir uns nicht direkt für einen Messwert, sondern für eine Funktion des Messwerts.

Beispiel: Erdanziehungskraft $F = m\, g$, $g = 9.81$ m/s²

Die Masse sei gewogen worden: m = (12,42 +/- 0,03) kg

Mittelwert von $F = m\, g$ = 12,42 kg 9,81 m/s² = 100,602 kg m/s²,

aber wie groß ist ΔF ?

Der Fehler von Δm bestimmt ΔF, aber ΔF ist nicht gleich Δm, allein schon nicht wegen der unterschiedlichen Einheit kg bzw. kg m/s².

Für Funktionen $f(x)$ **einer Variablen** x gilt: $$\Delta f = \left| \frac{df}{dx} \cdot \Delta x \right|$$

hier: ΔF = | dF/dm Δm | = g Δm = 9.81 m/s² 0,03 kg = 0,29 kg m/s²

→ F = (100,6 +/- 0,3) kg m/s² (ΔF angegeben mit einer sign. Stellen)

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Fehlerfortpflanzung (2)

Funktionen von mehreren Veränderlichen

Für Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Variablen x_1, x_2, ... x_n gilt:

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k\right)^2}}$$

Beispiel: Erdanziehungskraft $F = m\, g$, jetzt: g = (9,81 +/- 0,01) m/s²

Die Masse sei gewogen worden: m = (12,42 +/- 0,03) kg

Frage: Wie groß ist der Fehler für ΔF
bei $F = F(m, g)$ mit 2 fehlerbehafteten Größen m und g ?

Part. Ableitungen: $\partial F/\partial m = g$, Δm = 0,03 kg, $\partial F/\partial g = m$, Δg = 0,01 m/s²

→ $\Delta F = \sqrt{(g\,\Delta m)^2 + (m\,\Delta g)^2}$
= √ (9,81 m/s² 0,03 kg)² + (12,42 kg 0,01 m/s²)² = 0,3194 kg m/s²

F = (100,6 +/- 0,3) kg m/s² (d.h. ΔF hat sich vergrößert, vorher 0,29 kg m/s²)

Fehlerfortpflanzung (3)

Weiteres Beispiel

Trägheitsmoment J eines dünnen homogenen Stabes der Masse m, Länge L, bezüglich einer Achse senkrecht zur Länge, durch den Schwerpunkt:

$J = 1/12\ m\ L^2$

Frage: Wie groß ist ΔJ, wenn sowohl m als auch L mit Fehler behaftet sind?

Part. Ableitungen: $\partial J/\partial m = 1/12\ L^2$, $\partial J/\partial L = 1/12\ m\ 2\ L$

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\overline{L}^2 \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\overline{m} \cdot 2\overline{L} \cdot \Delta L\right)^2}$$

Beispiel: m = (120,12 +/- 0,28) g, L = (21,3 +/- 0,1) cm

→ J = 4541,4369 g cm^2, ΔJ = 44 g cm^2 (gerundet auf 2 sign. Stellen)

Messergebnis: J = (4541 +/- 44) g cm^2