1. Mechanik

1.1 Kinematik

Mathematische Beschreibung von Bewegungen,

1-dim. Koordinatensystem:

Achsen, Beschriftungen

Messwerte, Tabelle

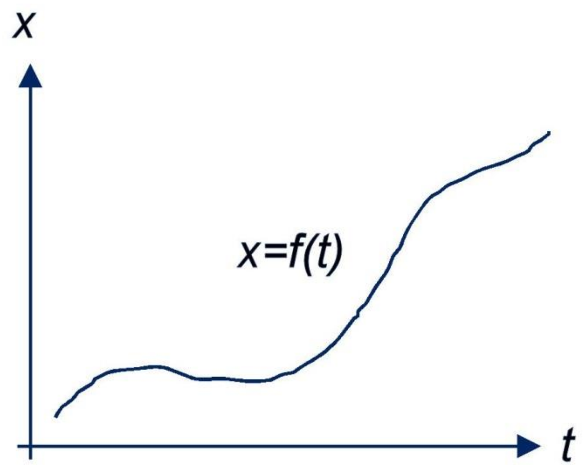
Weg-Zeit-Diagramm

Funktion

Ort als Funktion der Zeit

$x = f(t) = x(t)$: **Ortsfunktion**

(Weg-Zeit-Diagramm)

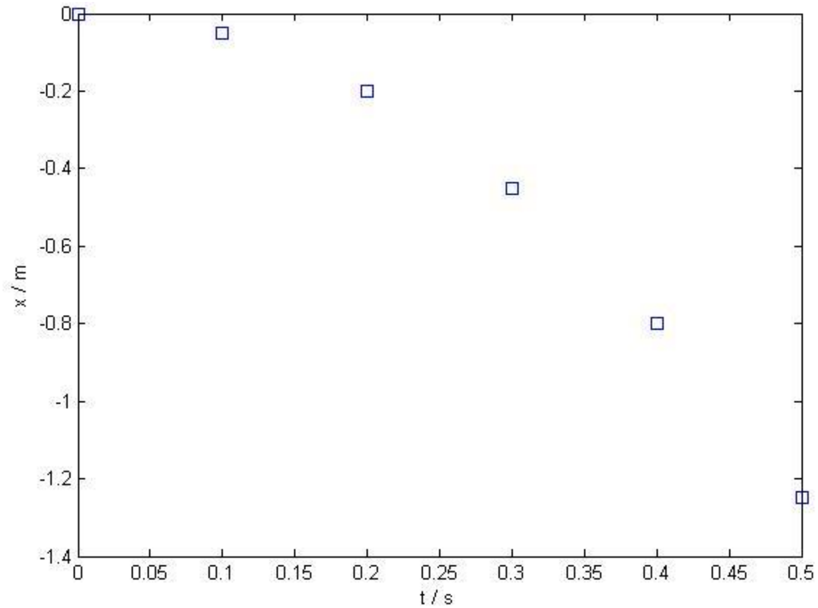


Funktionale Form

Wie kommt man auf die Form der Ortsfunktion?

Beispiel:
Messung der Position zu verschiedenen Zeiten

t / s	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x / m	-0.00	-0.05	-0.20	-0.45	-0.80	-1.25



Form: nicht linear, evtl. Parabel

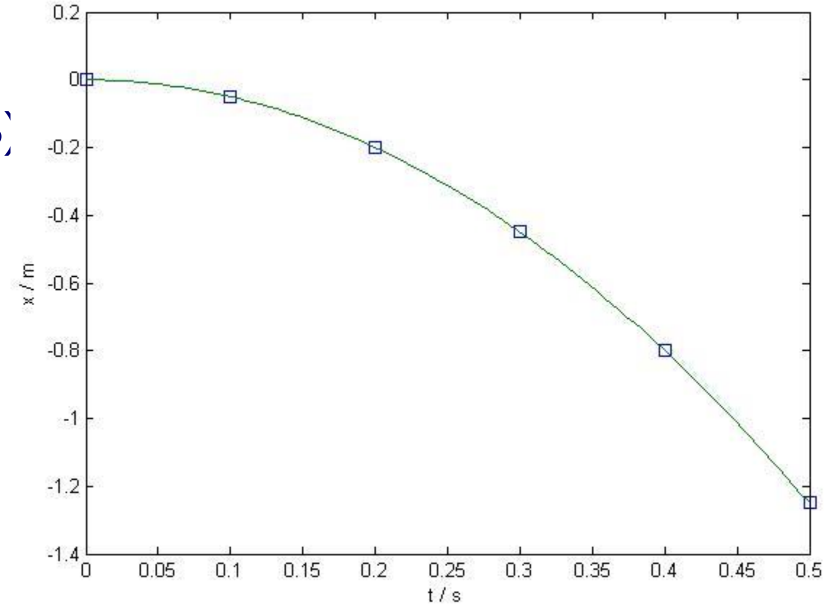
Polynom-Fit mit Kurve 2. Ordnung (z.B. mit MATLAB)

$$x(t) = p_1\, t^2 + p_2\, t + p_3$$

>> p = polyfit(t, x, 2)

p = [$p1$, $p2$, $p3$] = [-5.0, 0.0, 0.0]

➔ **Ortsfunktion:** $x(t) = -\,5.0\;t^2$



Geschwindigkeit

Idee:
Weg, der innerhalb einer Zeit zurückgelegt wird

Bsp.: HH -> F, 500 km in 5 Stunden

Mittlere Geschwindigkeit:
v_m = Strecke / Zeit

hier: $v_m = 500$ km / 5 h = 100 km /h

Radarkontrolle:
Geschwindigkeitsbeschr.: 100 km/h

Tacho: 150 km/h
* Momentan-Geschw. > mittlere Geschw.
(kann aber auch kleiner sein)

Momentan-Geschwindigkeit:

$v := \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$

Ableitung der Ortsfunktion

(Änderung der Position)

Federpendel:
$v_m = 0$

v nacheinander > und < 0

-> Wahl des Koordinatensystems

(Momentan-)Beschleunigung:

$a := \mathrm{d}v / \mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x / \mathrm{d}t^2$

Ableitung der Geschw.funktion = zweite Ableitung der Ortsfunktion

(Änderung der Geschwindigkeit)

Funktions-Beispiele (in Eigenarbeit v = dx/dt und a = dv/dt berechnen)

1. Konstante Funktion
$x = \mathrm{f}(t) = c = \mathrm{const}$

2. Lineare Funktion
$x = c\,t + b$

3. Quadratische Funktion
$x = c\,t^2$

4. Sinus-Schwingung
$x = c \sin(b\,t)$

5. Exponential-Funktion
$x = c \exp(b\,t)$ mit: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

6. Hyperbel-Funktion
$x = c\,/\,t$

Skizzieren Sie die Funktionen *x*, *v* und *a*!

Formelsammlung:

$\mathrm{d}\,x^n / \mathrm{d}x = n\,x^{n-1}$

$\mathrm{d}\sin(x) / \mathrm{d}x = \cos(x)$

$\mathrm{d}\cos(x) / \mathrm{d}x = -\sin(x)$

$\mathrm{d}\exp(x) / \mathrm{d}x = \exp(x)$

$\mathrm{d}\,f(c\,x) / \mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}f(z) / \mathrm{d}z$ mit: $z = c\,x$

$\mathrm{d}\,(c * f(x)) = c * \mathrm{d}f / \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\,(f(x) + g(x)) / \mathrm{d}x = \mathrm{d}f / \mathrm{d}x + \mathrm{d}g / \mathrm{d}x$

Funktions-Beispiele (Lösungen)

1. Konstante Funktion

$x = \mathrm{f}(t) = c = \mathrm{const}$

$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$

$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$

2. Lineare Funktion::

$x = c\,t + b$

$v = c$

$a = 0$

3. Quadratische Funktion::

$x = c\,t^2$

$v = 2\,c\,t$

$a = 2\,c$

4. Sinus-Schwingung::

$x = \;\; c \sin(\,b\,t\,)$

$v = \;\; c\,b \cos(\,b\,t\,)$

$a = -\,c\,b^2 \sin(\,b\,t\,)$

5. Exponential-Funktion::

$x = c \exp(\,b\,t\,)$

$v = c\,b \exp(\,b\,t\,)$

$a = c\,b^2 \exp(\,b\,t\,)$

6. Hyperbel-Funktion::

$x = c\,/\,t$

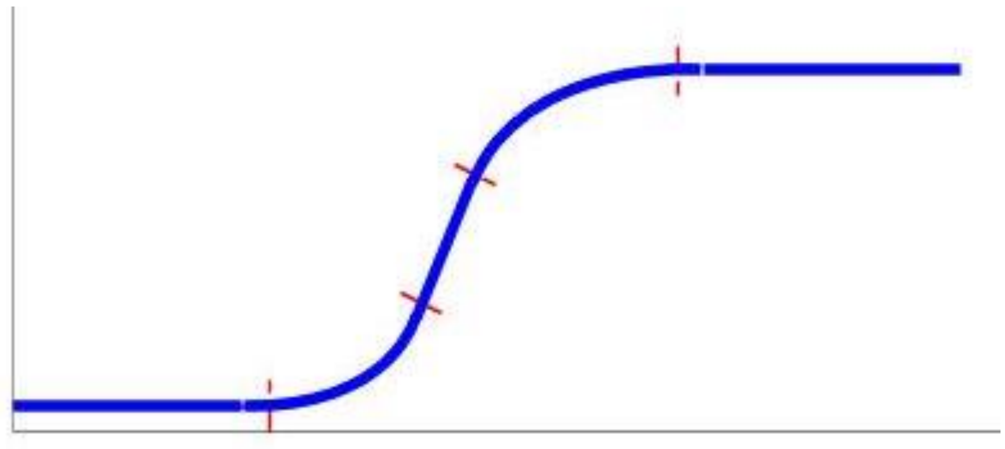
$v = -\,c\,/\,t^2$

$a = 2\,c\,/\,t^3$

Aufgaben: (Baumann-Buch)

Aufgabe 1.1.1-1: Das Weg-Zeit-Diagramm einer Bewegung habe die Form eines Trapezes. Zeichnen Sie das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (Änderung der Position)!

Erweiterung: Das WegZeitDiagramm einer Bewegung bestehe aus einer waagrechten Geraden, einer anschließenden Parabel, einem Geradenstück mit positiver Steigung, einer nach unten geöffneten Parabel und einem waagrechten Geradenstück.



Funktions-Beispiele (in Eigenarbeit)

Berechnen Sie ebenso die Integrale $x = \int v \, \mathrm{d}t$ **zu:**

$v = \mathrm{f}(t) = k = \mathrm{const}$

$v = k\, t$

$v = k \sin(b\, t)$

$v = k \cos(b\, t)$

$v = k \exp(bt)$

Formelsammlung::

$\int x^{n} \, \mathrm{d}x = x^{n+1} / (n+1) + c$ c: Integrationskonstante

$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c$

$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c$

$\int \exp(x) \, \mathrm{d}x = \exp(x) + c$

$\int f(b\, x) \, \mathrm{d}x = \int f(z) \, \mathrm{d}z / b$ mit: $z = b\, x$

Integrale (Lösungen)

1. Konstante Funktion

$v = \mathrm{f}(t) = k = \mathrm{const}$

$x = \int v \, \mathrm{d}t = k \int \mathrm{d}t = k\, t + \mathrm{c}$

c: Integrationskonstante

2. Lineare Funktion::

$v = k\, t$

$x = \int v \, \mathrm{d}t = k \int t \, \mathrm{d}t = k/2 \; t^2 + c$

c: Integrationskonstante

3. Sinus-Schwingung::

$v = \; k \sin(\, b\, t\,)$

$x = \int v \, \mathrm{d}t = k \int \sin(\, bt\,) \, \mathrm{d}t =$

$= - \, k \,/\, b \;\; \cos(\, bt\,) + c$

4. Kosinus-Schwingung::

$v = \; k \cos(\, b\, t\,)$

$x = \int v \, \mathrm{d}t = k \int \cos(\, bt\,) \, \mathrm{d}t =$

$= \; k \,/\, b \;\; \sin(\, bt\,) + c$

5. Exponential-Funktion::

$v = k \exp(\, bt\,)$

$x = \int v \, \mathrm{d}t = k \int \exp(\, bt\,) \, \mathrm{d}t =$

$= k \,/\, b \;\; \exp(\, bt\,) + c$

Freier Fall – gleichförmig beschleunigt: (Cassy-Experiment)

Fallgesetz in Erdnähe:
$a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\,g = -9.81...\mathrm{m/s}^2 = \mathrm{const.}$

Konstante **Erdbeschleunigung *g***

wenn man Luftwiderstand und sonstige Kräfte, wie Wind, vernachlässigt

Integration:: $v = \int a\,\mathrm{d}t + c_1 = -\,g\,t + c_1$

AW: $v(t_0) = v_0 = -\,g\,t_0 + c_1 \;\; \text{->} \;\; c_1 = v_0 + g\,t_0$

→physikalisch aussagekräftigere Konstante

v_0 = Geschw. zur Zeit t_0

$\boxed{v(t) = -\,g\,(t-t_0) + v_0}$

Aufgabe: $t0 = 5$ s, $v0 = 10$ m/s. $t = 10$ s

Startzeitpunkt::
t_0 kann oft als 0 gewählt werden, aber nicht immer (Klausur!)

Spezialfall: $t_0 = 0$, $v_0 = 0$: $v = -\,g\,t$

2. Integration: $x = \int v\,\mathrm{d}t + c_2 =$

$= -\,g/2\,t^2 + c_1\,t + c_2$

Verwendung der Anfangswerte zur Zeit t_0:

$\boxed{x(t) = -\,g/2\,(t-t_0)^2 + v_0\,(t-t_0) + x_0}$

Anfangsbedingungen:

x_0 : Position zur Zeit t_0
v_0 : Geschw. zur Zeit t_0

Kinematische Beziehungen

Ortsfunktion: Ort als Funktion der Zeit

$x = f(t) = x(t)$ (Weg-Zeit-Diagramm)

Mittlere Geschwindigkeit:

v_m = Strecke / Zeit

Momentan-Geschwindigkeit:

$v := \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$

Ableitung der Ortsfunktion

(Momentan-)Beschleunigung:

$a := \mathrm{d}v / \mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x / \mathrm{d}t^2$

Ableitung der Geschw.funktion =
zweite Ableitung der Ortsfunktion

Ableitung / Integration:

$x(t) \leftrightarrow v(t) \leftrightarrow a(t)$

Aufgaben: (Baumann-Buch)

Aufgabe 1.1.1-2: Für einen fallenden Gegenstand gilt $x(t) = b\,t^2$ mit $b = 5$ m/s^2.

a) Bestimmen Sie seinen Ort für $t = 1$ s; 2 s; 3 s; 5 s
und die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 5$ s.

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten fünf Sekunden?

c) Berechnen Sie die momentane Beschleunigung zur Zeit $t = 5$ s.

Aufgabe 1.1.1-3: Ein Teilchen befindet sich zur Zeit $t_0 = 2$ s am Ort $x(t_0) = 0.10$ m.
Es bewegt sich mit $v(t) = v_0 \cos(\omega t)$; $v_0 = 2$ m/s; $\omega = 4$ 1/s.
Gesucht: $a(t)$ und $x(t)$ für $t_1 = 10$ s.

Wichtig: sin und cos im **Bogenmaß** (rad) auswerten, nicht in Grad !

Ergebnis: $a = -5.96$ m/s^2, $x = -2.21$ cm, $c = -0.3947$ m

Typische Klausuraufgabe zur Kinematik

Ableitung und Integration + Anfangswert

Bei einem Höppler Viskosimeter sei bekannt, dass die Geschwindigkeit der Stahlkugel, durch

$v(t) = v_L\,(1 - e^{-Pt})$, mit $v_L = 10$ cm/s und $P = 150$ 1/s, beschrieben werden kann.

Wie groß ist ihre Beschleunigung zur Zeit 0.015 s? Welche Strecke legt sie in den ersten 0.015 s zurück, wenn sie anfänglich ruhte?

Lösung

Beschleunigung: $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ (1 Punkt)

$a = \mathrm{d}v_L/\mathrm{d}t - v_L\,\mathrm{d}\,e^{-Pt}/\mathrm{d}t = 0 - v_L\,(-P)\,e^{-Pt} = v_L\,P\,e^{-Pt}$ (1 Punkt)

$a(0.015\text{ s}) = v_L\,P\,e^{-P\,0.015\text{ s}} = 158\text{ cm/s}^2 = 1.58\text{ m/s}^2$ (1 Punkt)

Position: $x = \int v\,\mathrm{d}t$ (1 Punkt)

$x(t) = \int v_L\,(1 - e^{-Pt})\,\mathrm{d}t = \int v_L\,\mathrm{d}t - \int v_L\,e^{-Pt}\,\mathrm{d}t = v_L\,t + v_L/P\,e^{-Pt} + c$ (1 Punkt)

Anfangsbed. (Strecke gesucht): $x(0) = 0 = v_L/P\,e^{-P\,0} + c = v_L/P + c$ (1 Punkt)

Integrationskonst.: $c = -\,v_L/P = -\,0.0667$ cm (1 Punkt)

Position nach 0.015 s: $x(0.015\text{ s}) = v_L\,0.015\text{ s} + v_L/P\,e^{-P\,0.015\text{ s}} + c = 0.09$ cm (1 Punkt)

Zusammenfassung

Kinematik – 1-dimensional: Bewegung entlang einer Geraden

Zeitablauf einer Bewegung: Orts-Funktion $x = \mathrm{f}(t)$

Uhr: Startzeitpunkt t_0
Koordinatensystem: Startposition x_0 / Startgeschwindigkeit v_0

Geschwindigkeits-Funktion: $v(t) = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$ (Ableitung) ←→ $x = \int v \,\mathrm{d}t + c_1$
Beschleunigungs-Funktion: $a(t) = \mathrm{d}v / \mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x / \mathrm{d}t^2$ ←→ $v = \int a \,\mathrm{d}t + c_2$
Integrationskonstanten c_1 und c_2 aus Anfangswerten x_0 und v_0

Wie geht es weiter? 1-dim. → 2- bzw. 3-dim.

Uhr bleibt gleich
Koordinatensystem: 1-dim. → 2- bzw. 3.dim

Gleich bleiben auch die Abhängigkeiten:
Ort ←→ Geschwindigkeit ←→ Beschleunigung

1. Mechanik

1.1 Kinematik

1.1.2 Bewegung in der Ebene / im Raum

2- und 3-dimensionale Bewegung, zum Beispiel

* Waagrechter Wurf
* Flug im Raum

Versuch: Wurfmaschine

1-dim. Bewegung, geradlinig: $x = x(t)$
2-dim. Bewegung in Ebene: $\boldsymbol{r}(t) = (\ x(t),\ y(t)\ )$
3-dim. Bewegung im Raum: $\boldsymbol{r}(t) = (\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ )$

Ortsvektor *: $\boldsymbol{r}(t) = (\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ )$
d.h. 2 oder 3 Funktionen der Zeit (Vektor)

→**Trajektorie** (parametrisierte Raumkurve)

Kinematik analog 1-dim:

Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$
Beschleunigung: $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$

in Komponenten-Schreibweise (2-dim):

$\boldsymbol{r}(t) = (\ x(t),\ y(t)\ )$

$\boldsymbol{v}(t) = (\ v_x(t),\ v_y(t)\ ) = (\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t\ )$

$\boldsymbol{a}(t) = (\ a_x(t),\ a_y(t)\ ) = \ldots$

(3-dim analog mit zusätzlichem $z(t)$)

=> **Vektorrechnung**

---

* eigentlich Spaltenvektor: $\boldsymbol{r}(t) = (\ x(t),\ y(t),\ z(t)\ )^{T}$: transponiert

Vektorrechnung (Eigenarbeit)

Addition von Vektoren
(komponentenweise)

$\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$
$\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$

Berechne: $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$

Komponentenweise:

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Beispiel:

$\boldsymbol{r}_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (-3, 4)$

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (2 - (-3), 1 - 4) = (5, -3)$$

Multiplikation von *r* mit Skalar *c*

Berechne $c\,\boldsymbol{r}$, für $c = -2$, $\boldsymbol{r} = (-3, 4)$

Multiplikation für jede Komponente

$$c\,\boldsymbol{r} = c\,(x, y) = (c\,x, c\,y)$$

Beispiel:

$\boldsymbol{r} = (-3, 4)$, $c = -2$

$$c\,\boldsymbol{r} = (c\,x, c\,y) = ((-2)(-3), (-2)\,4) = (6, -8)$$

Länge (Betrag) eines Vektors

$$| \boldsymbol{r} | = | (x, y) | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Berechne die Länge von $\boldsymbol{r} = (3, 4)$

$$| (3, 4) | = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Aufgabe: (Eigenarbeit)

Waagrechter Wurf:

$x(t) = v_0\, t + x_0$

$y(t) = -\,(g/2)\, t^2$

$\boldsymbol{v}(t) = (\, v_x, v_y \,) = (\, v_0, -g\, t \,)$

$\boldsymbol{a}(t) = (\, a_x, a_y \,) = (\, 0, -g \,)$

Berechnen Sie $\boldsymbol{v} = (\, v_x, v_y \,) = (\, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \,)$
und $\boldsymbol{a} = (\, a_x, a_y \,) = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$

Allgemeine Lösung (Schiefer Wurf):

$\boldsymbol{a}(t) = (\, 0, -\,g \,)$

$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{a}\,(\, t - t_0 \,) + \boldsymbol{v}_0 = (\, v_{0x}, -\,g\,(\, t - t_0 \,) + v_{0y} \,)$

$\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{a}/2)\,(\, t - t_0 \,)^2 + \boldsymbol{v}_0\,(\, t - t_0 \,) + \boldsymbol{r}_0$

In Komponenten:

$a_x(t) = 0,\;\; a_y(t) = -\,g$

$v_x(t) = v_{0x} = \text{const.},\;\; v_y(t) = -\,g\,(\, t - t_0 \,) + v_{y0}$

$x(t) = v_{ox}\,(\, t - t_0 \,) + x_0,$

$y(t) = -\,(g/2)\,(\, t - t_0 \,)^2 + v_{0y}\,(\, t - t_0 \,) + y_0$

Anfangsbedingungen:

t_0 : Anfangszeitpunkt

$\boldsymbol{v}_0 = (\, v_{0x}\,,\, v_{0y} \,)$ Anfangsgeschwindigkeit

$\boldsymbol{r}_o = (x_0, y_0)$ Anfangsort

Versuch Spritzflasche:

Anfangsbedingungen:

$t_0 = 0$ s Uhr so einstellen

$\boldsymbol{v}_0 = (v_1 , v_2)$

$\boldsymbol{r}_o = (x_0, y_0) = (0, 0)$ Koordinatensystem wählen

Lösung Schiefer Wurf:

$x(t) = v_1\, t$

$y(t) = - (g/2)\, t^2 + v_2\, t$

$\boldsymbol{v}(t) = (v_x, v_y) = (v_1, - g\, t + v_2)$

$\boldsymbol{a}(t) = (a_x, a_y) = (0, - g)$

Trajektorie ausmessen:

maximale Höhe: $y_{max} = ...$

Weite: $x_{max} = ...$

Situation am Maximum:

Umkehrpunkt: $v_y(t_m) = 0$

t_m = Zeit, wenn Maximum erreicht ist

$\rightarrow$ $v_y(t_m) = - g\, t_m + v_2 = 0$

$t_m = v_2 / g$ [= 0.25 s, v_y = 2.5 m/s]

Gemessene Höhe des Maximums:

$y_{max} = y(t_m) = -(g/2)\, t_m^{\ 2} + v_2\, t_m$

$\rightarrow$ $v_2 = (2\, g\, y_{max})^{½}$ und $t_m = v_2 / g$

v_1 analog aus gemessener Weite

Aufgaben: (Baumann-Buch)

Aufgabe 1.1.2-1:

Ein Teilchen bewegt sich mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a} = (4, 3)\ \mathrm{m/s}^2$
Es befindet sich zur Zeit $t = t_0 = 0$ am Ort $x = 4$ m und $y = 3$ m.
Seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ist im gleichen Zeitpunkt durch $(2, -9)$ m/s gegeben.

Berechnen Sie
a) seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2$ s
b) seinen Ort zur Zeit $t = 4$ s.

Lösung:

$$\boldsymbol{v}(t) = (4,3)\ \mathrm{m/s}^2 * t + \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{c} = (2,-9)\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{v}(2\mathrm{s}) = (10, -3)\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = (4,3)/2\ \mathrm{m/s}^2 * t^2 + (2,-9)\ \mathrm{m/s} * t + \boldsymbol{r}(0)$$
$$\boldsymbol{r}(0) = (4,3)\ \mathrm{m}$$
$$\boldsymbol{r}(4\mathrm{s}) = (44, -9)\ \mathrm{m}$$

Typische Klausuraufgabe zur Kinematik im Raum

Die Geschwindigkeit eines Objekts sei im 3-dimensionalen Raum gegeben durch

$\boldsymbol{v}(t) = [\ b\, t,\ c,\ 0\ ]$, mit $b = 2$ m/s^2 und $c = 3$ m/s.

Zur Zeit $t_0 = 1$ s befindet sich das Objekt an der Position $\boldsymbol{r}_o = [\ 1, 2, 3\ ]$ m.

Wie groß ist seine Beschleunigung, an welchem Ort befindet es sich zur Zeit $t_1 = 2$ s?

Lösung

Beschleunigung: $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ (1 Punkt)

$\boldsymbol{a}\,(t) = [\ b, 0, 0\ ]$ (1 Punkt)

$a(\ 2\mathrm{s}\ ) = [\ 2, 0, 0\ ]$ m/s^2 (1 Punkt)

Position: $\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t$ (1 Punkt)

$\boldsymbol{r}(t) = [\ b/2\ t^2 + c_1,\ c\ t + c_2,\ c_3\ ]$ (1 Punkt)

Anfangsbed. $t_0 = 1\mathrm{s}$: $\boldsymbol{r}(1\mathrm{s}) = [b/2\ (1\mathrm{s})^2 + c_1,\ c\ 1\mathrm{s} + c_2,\ c_3\ ] = [\ 1, 2, 3\ ]$ m (1 Punkt)

Integrationskonst.: $c_1 = 1\mathrm{m} - b/2\ (1\mathrm{s})^2 = 0$, $c_2 = 2\mathrm{m} - c\ 1\mathrm{s} = -1$ m, $c_3 = 3$ m (1 Punkt)

Position bei $t_1 = 2\mathrm{s}$: $\boldsymbol{r}(2\mathrm{s}) = [\ 1{*}4,\ 3{*}2\ -1,\ 0{+}3\ ]$ m $= [\ 4, 5, 3\ ]$ m (1 Punkt)

Allgemeine Bewegung im R^3:

d.h. ***a*** ist im Allg. nicht mehr konstant, weder in Betrag noch in Richtung

Versuch: Autofahrt auf kurviger Strecke
oder Achterbahn

Momentangeschwindigkeit zur Zeit t

Momentanbeschleunigung bewirkt Änderung der Geschwindigkeit

Geschwindigkeits-Änderung hat 2 Anteile:

1. **Betrag**
2. **Richtung**

Zerlegung von Vektor ***a***:

1. Anteil in Richtung von ***v***: $\boldsymbol{a}_{||}$
   Tangential- oder **Bahnbeschleunigung**
2. Anteil senkrecht dazu: $\boldsymbol{a}_{\perp}$
   Zentripetal- oder **Normalbeschleunigung**

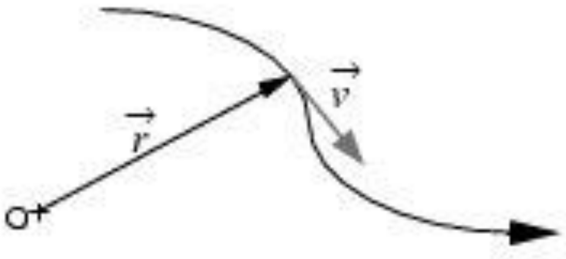
$\boldsymbol{a}_{||}$ bewirkt Änderung des **Betrags** von ***v***
$\boldsymbol{a}_{\perp}$ bewirkt Änderung der **Richtung** von ***v***

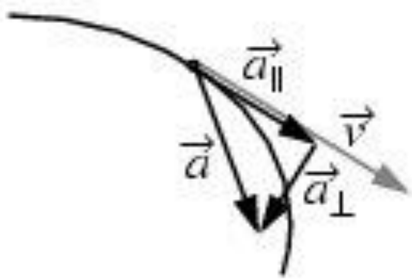
Vergleich mit Autofahrt:
1. Beschleunigen, 2. Kurvenfahrt

Beispiele:

a) Freier Fall: Zerlegung von ***a*** bleibt gleich

b) Waagrechter Wurf: Zerlegung ändert sich





Bahnkurve: (in 2 Dimensionen)

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (\ x(t), y(t)\ )$ → weist für bestimmte Zeit t auf Bahnpunkt

Momentangeschwindigkeit:

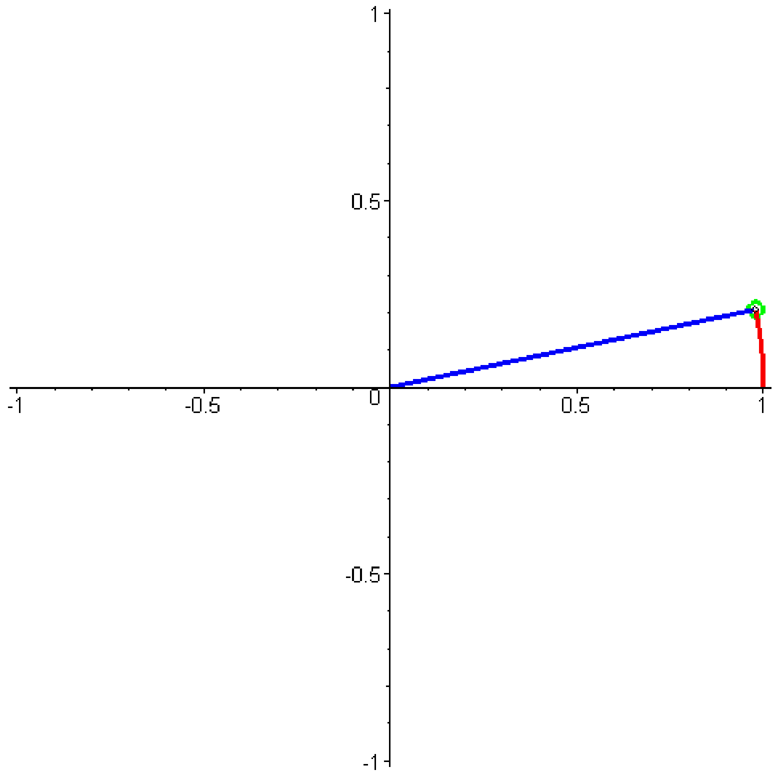
$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (\ v_x(t), v_y(t)\ )$ → ist Tangente an die Bahnkurve

Momentanbeschleunigung:

$\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ → bewirkt Änderung der Geschwindigkeit

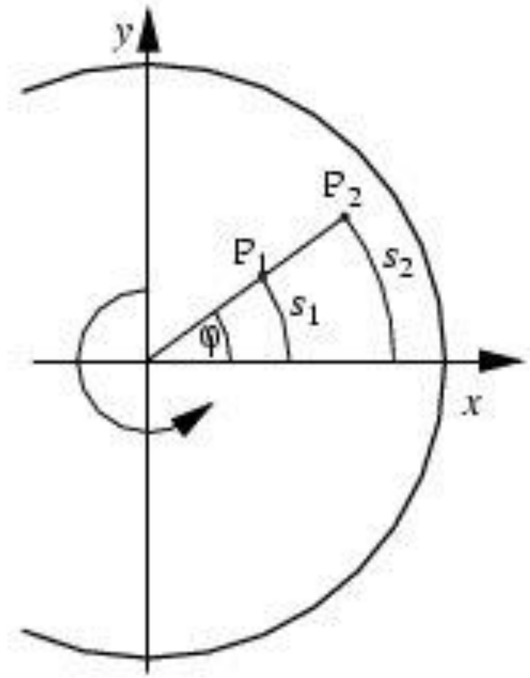
2 Anteile: $\boldsymbol{a}_{||}$ bewirkt Änderung des **Betrags** von $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{a}_{L}$ bewirkt Änderung der **Richtung** von $\boldsymbol{v}$

Kreisbewegung:

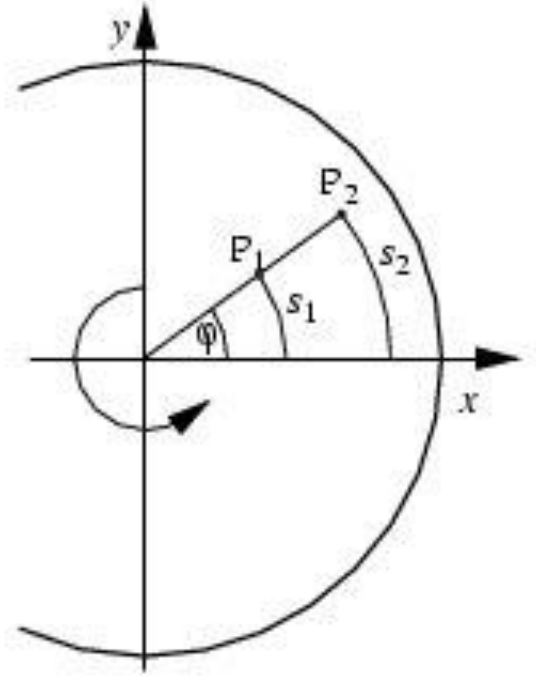


Wahl des **Koordinatensystems**:
Ursprung im Zentrum der Drehung
→ $|\,\boldsymbol{r}(t)\,| = R = \text{const.}$
Abstand zum Zentrum ändert sich nicht,
da Scheibe ein fester Körper

$\varphi(t)$: **Winkel** zur x-Achse
ändert sich mit der Zeit



Beispiele:
* Drehpendel
* Felge: *P*1 und *P*2 zum selben φ
  unterschiedlich lange Strecken



Bahnkurve der 2-dim. Kreisbewegung**:**

Ursprung im Zentrum der Drehung
$|\,\boldsymbol{r}(t)\,| = R = \text{const.}$

$\varphi(t)$: **Winkel** zur x-Achse
ändert sich mit der Zeit

$\boldsymbol{r}(t) = [\, R\cos(\,\varphi(t)\,),\; R\sin(\,\varphi(t)\,)\,]$

Einheitsvektor zu Winkel φ:

$\mathbf{e}_r(t) = [\,\cos(\,\varphi(t)\,),\; \sin(\,\varphi(t)\,)\,]$

zeigt radial nach außen

Bahnkurve: $\boldsymbol{r}(t) = R\,\mathbf{e}_r(t)$

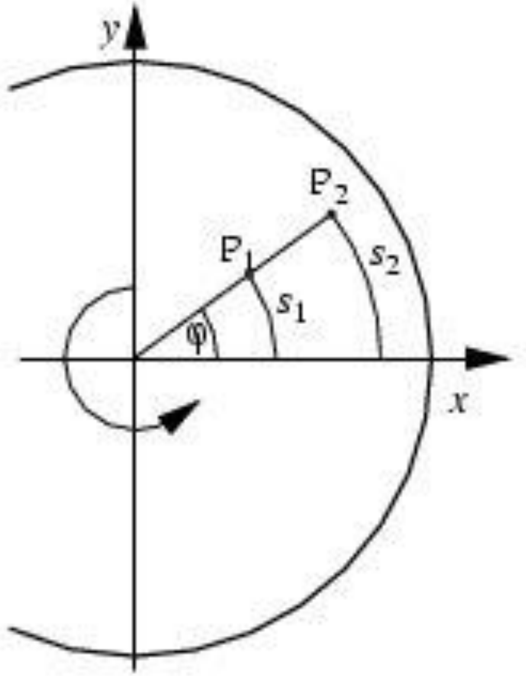
Aufgabe (Eigenarbeit)

Trigonometrie / sin und cos

Skizzieren Sie Winkel und Strecken

im rechtwinkligen Dreieck.

Wie sind sin und cos definiert?



Bogenmaß:

$\boldsymbol{r}(t) = [\, R\cos(\,\varphi(t)\,),\ R\sin(\,\varphi(t)\,)\,]$

Einheitsvektor zu Winkel φ:

$\mathbf{e}_r(t) = [\,\cos(\,\varphi(t)\,),\ \sin(\,\varphi(t)\,)\,]$

Drehwinkel φ(t), im Bogenmaß

Umrechnung Grad in Bogenmaß:

$360° \rightarrow 2\pi$

Umrechnungsfaktor = 2π / 360°

Aufgabe:

Wandeln Sie folgende Winkel ins Bogenmaß:
0°, 90°, 180°, 45°, 30°, 120°, 270°, 450°

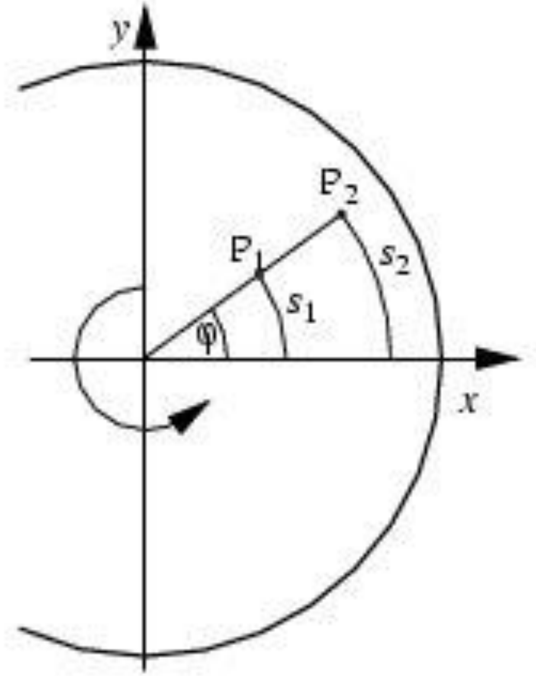
Bahnkurve: $\boldsymbol{r}(t) = R\,\mathbf{e}_r(t)$

Aufgabe (Eigenarbeit)

Berechnen Sie $\boldsymbol{r}(t)$ für R = 1m und

für folgende Winkel (im Bogenmaß):

$\varphi(t) = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 2\pi,\ \pi/4$



Bahnkurve der 2-dim. Kreisbewegung**:**

Einheitsvektor zu Winkel φ:

$\mathbf{e}_r(t) = [\ \cos(\ \varphi(t)\ ),\ \sin(\ \varphi(t)\ )\ ]$

zeigt radial nach außen

$\boxed{\text{Bahnkurve:} \quad \boldsymbol{r}(t) = R\ \mathbf{e}_r(t)}$

Bahngeschwindigkeit:

$\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}(\mathrm{t})\ /\ \mathrm{d}t$

$= [\ -R \sin(\ \varphi(t)\ )\ \ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
$\quad R \cos(\ \varphi(t)\ )\ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t\ \ ]$

Momentane **Winkelgeschwindigkeit**:

$\omega(t) := \mathrm{d}\varphi(t)\ /\ \mathrm{d}t$

Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{v}$
(tangential zur Bahn):

$\mathbf{e}_v(t) = [\ -\sin(\ \varphi(t)\ ),\ \cos(\ \varphi(t)\ )\ ]$

$\boxed{\text{Bahngeschwindigkeit:} \quad \boldsymbol{v}(t) = R\ \omega(t)\ \mathbf{e}_v(t)}$

Bahngeschwindigkeit

$\boldsymbol{v}(\mathrm{t}) = R\,\omega(t)\,\mathbf{e}_v(t)$

wird größer, je größer R ist.

Betrag der Bahngeschwindigkeit:

$v(t) = |\,\boldsymbol{v}(t)\,| = R\,\omega(t)$, für $\omega > 0$

Aufgabe: (Eigenarbeit)

Berechnen Sie $\omega = d\varphi / dt$ und v(t),
für $R = 1$ m und $\varphi(t) = (2\pi/T)\,t$, mit $T = 2$ s.

Was ergäbe sich für Winkel in Grad ?

Spezialfall: gleichförmige Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \omega_0 = \text{const.}$

eine volle Drehung 2π benötigt Zeit T

T = **Periodendauer** der Kreisbewegung

→ $\omega_0 = \Delta\varphi / \Delta t = 2\pi / T$

Frequenz $f = 1 / T = \omega_0 / 2\pi$
(Drehzahl) $[\,f\,] = 1/\mathrm{s} = 1$ Hz (Hertz)

Integration: $\omega(t) = \omega_0 = \text{const.} = d\varphi / dt$

→ $\varphi(\mathrm{t}) = \omega_0\,(\,t - t_0\,) + \varphi_0$

analog Linearbewegung mit $v = v_0 = \text{const.}$

Aufgabe 1.1.2-6:

Bei einer Fluggeschwindigkeit von v = 420 km/h legt die Nabe der Luftschraube während jeder Umdrehung die Strecke 3.6 m zurück.

Welche Drehzahl hat die Luftschraube?

Lösung: 32.4 Hz

Lösung: Vorwärtsbewegung:

$x(t) = v\,t$, v = 420 km/h

zurückgelegte Strecke bei einer Umdrehung mit Periodendauer T:

$x(T) = v\,T = s = 3.6$ m

→ $f = 1\,/\,T = v\,/\,s$ = 420 km/h / 3.6 m

f = 32.4 Hz

Beschleunigung: (allg. Kreisbewegung)

$\boldsymbol{a}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)\,/\,\mathrm{d}t$

$= \mathrm{d}\,[\,R\,\omega(t)\,\mathbf{e}_v(t)\,]\,/\,\mathrm{d}t =$ (Produktregel)

$= R\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t\,\mathbf{e}_v + R\,\omega\,\mathrm{d}\mathbf{e}_v/\mathrm{d}t$

mit: $\mathbf{e}_v(t) = [\,-\sin(\,\varphi(t)\,),\ \cos(\,\varphi(t)\,)\,]$

$\mathrm{d}\mathbf{e}_v/\mathrm{d}t = -\omega\,[\,\cos(\,\varphi\,),\ \sin(\,\varphi\,)\,)\,] = -\,\omega\,\mathbf{e}_r$

Winkelbeschleunigung:

$\alpha(t) := \mathrm{d}\omega(t)\,/\,\mathrm{d}t$

Beschleunigung:

$\boldsymbol{a}(t) = R\,\alpha(t)\,\mathbf{e}_v(t) - R\,\omega(t)^2\,\mathbf{e}_r(t) =$

$= \boldsymbol{a}_{||}(t) + \boldsymbol{a}_{\perp}(t)$

Beispiele:

1. Gleichförmige Kreisbewegung:

$\varphi(t) = \omega_0 \; (t - t_0) + \varphi_0$

φ_0 : Anfangswinkel, $\omega_0 = 2\pi/T$ = const.

konstante Winkelgeschwindigkeit:
$\omega(t) = \omega_0$ = const.

keine Winkelbeschleunigung:

$\alpha(t) = d\omega(t)/dt = 0$

.→ keine Tangentialbeschleunigung

Zentripetalbeschleunigung:
$\boldsymbol{a}_L(t) = - R\, \omega_0^2\, \mathbf{e}_r(t) \;= - \omega_0^2\, \boldsymbol{r}(t)$

$| \boldsymbol{a}_L | = R\, \omega_0^2$ = const.

immer auf das Drehzentrum gerichtet,
Geschwindigkeit ändert sich nach innen

2. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung: (Labor-Versuch)

$\alpha(t) = \alpha_0$ = const., weiterhin: R = const.

$\omega(t) = \alpha_0\, (t - t_0) + \omega_0$

ω_0 : Anfangs-Winkelgeschwindigkeit

Zurückgelegter Winkel:

$\varphi(t) = (\alpha_0/2)\, (t - t_0)^2 + \omega_0\, (t - t_0) + \varphi_0$

(analog Linearbewegung)

Zusammenfassung Kreisbewegung

$|\,\boldsymbol{r}(t)\,| = R$ = const., $\varphi(t)$: Winkel zur x-Achse

$\boldsymbol{r}(t) = R\ \mathbf{e}_r(t)$

$\mathbf{e}_r(t) = [\ \cos(\ \varphi(t)\ ),\ \sin(\ \varphi(t)\ )\ ]$

$\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = R\ \omega(t)\ \mathbf{e}_v(t)$

$\mathbf{e}_v(t) = [\ -\sin(\ \varphi(t)\ ),\ \cos(\ \varphi(t)\ )\ ]$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega(t) = \mathrm{d}\varphi(t)\ /\ \mathrm{d}t$

$\boldsymbol{a}(\mathrm{t}) = R\ \alpha(t)\ \mathbf{e}_v(t) - R\ \omega(t)^2\ \mathbf{e}_r(t) =$

$= \boldsymbol{a}_{||}(t) + \boldsymbol{a}_{\mathrm{L}}(t)$

Winkelbeschleunigung: $\alpha(t) = \mathrm{d}\omega(t)\ /\ \mathrm{d}t$

Spezialfall: gleichförmige Kreisbewegung

$\omega(t) = \omega_0$ = const.

T = Periodendauer

$\omega_0 = 2\pi\ /\ T$

Frequenz $f = 1\ /\ T = \omega_0\ /\ 2\pi$

Aufgaben: (Baumann-Buch)

Aufgabe 1.1.2-7:

Ein Elektromotor mit der Drehzahl 4000 / min
läuft innerhalb von 8 s bis zum Stillstand aus.

Wie viel Umdrehungen führt er dabei aus?

Lösung: $n = 266{,}7$

Rechenweg:

$f_0 = 4000 \,/\, \mathrm{min} = 4000 \,/\, (60\ \mathrm{s}) = \omega_0 \,/\, 2\pi \rightarrow \omega_0 = 2\pi\, f_0 = 418.9\ \mathrm{Hz}$

Annahme: gleichförmig gebremst

$\varphi(\mathrm{t}) = (\alpha_0/2)\, t^{\,2} + \omega_0\, t$ und $\omega(t) = \alpha_0\, t + \omega_0$

Stillstand: $0 = \omega(\ 8\mathrm{s}\ ) = \alpha_0\ 8\ \mathrm{s} + \omega_0 \rightarrow \alpha_0 = -\ \omega_0 \,/\, 8\mathrm{s} = -\ 52.3 \,/\, \mathrm{s}^2$

Winkel in 8 s: $\varphi(\ 8\mathrm{s}\ ) = -\ (52.3 \,/\, 2\ \mathrm{s}^2)\ (8\mathrm{s})^2 + 418.6 \,/\, \mathrm{s}\ \ 8\mathrm{s} = 1675\ \mathrm{rad} = \mathbf{266.7} * 2\pi$

Bewegung im Raum:

Kreisbewegungen:

Bewegung um eine Achse im Raum

Winkelgeschwindigkeit wird Vektor: $\boldsymbol{\omega}(t)$

$\omega(t)$ = | $\boldsymbol{\omega}(t)$ | : Betrag der Winkelgeschw.

Drehache = Richtung von $\boldsymbol{\omega}$

Bahngeschwindigkeit: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

Winkelbeschleunigung als Vektor:
$\boldsymbol{\alpha}(t) = d\boldsymbol{\omega} / dt$

Bewegung im Raum (2):

Spirale:

Überlagerung von Kreisbewegung mit linearer Bewegung

Beispiel:

$\boldsymbol{r}(t) = (\, R\cos(\omega\, t),\, R\sin(\omega\, \mathrm{t}),\, v_z\, t\,)$

gleichförmige Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in x-y-Ebene, überlagert von gleichförmiger Linearbewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_z in z-Richtung