Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Schwingungen

Experimentalphysik
Ulrich Stein

Demonstr.:: Federpendel, Autos-Res., Doppelpendel

Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

1. Freie harmonische Schwingung

a) Federpendel

k: Federkonstante
m: schwing. Masse

Versuch: Federpendel

Kräfte-Gleichgewicht:
$m\,a = m\,\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 = F_F = -\,k\,z$

Schwingungs-Dgl: $\boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0}$

Lösung der DGL

sin- bzw. cos-förmige Bewegung

$$\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

φ: Phasenwinkel

$$f := \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Simulation: sin

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Eingesetzt in DGL (Eigenarbeit)

$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ $d^2z/dt^2 + k/m\, z = 0$

Berechnen Sie d^2z/dt^2 und setzen Sie das Ergebnis in die DGL ein!

$dz/dt = - A \sin(\omega_0 t + \phi)\, \omega_0$

$d^2z/dt^2 = - A \cos(\omega_0 t + \phi)\, \omega_0^2$

$=> \omega_0^2 - k/m = 0$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Mögliche Anfangswerte:

$z(0) = z_1$, $dz/dt(0) = v_0 = 0$ => $A = z_1$, $\phi = 0$

$z(t) = z_1 \cos(\omega_0 t)$: spezielle Lösung zu AW

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Weitere Pendel

b) Fadenpendel

β: Auslenkwinkel
l: Fadenlänge

Versuch: Fadenpendel

volle Dgl: $\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \sin \beta = 0$

Dgl für kleine β: $\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \beta \approx 0 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Weitere Pendel

c) Physisches Pendel

β: Auslenkwinkel
m: Masse
J_A: Trägheitsmoment
a: Abstand SP - Drehachse

Versuch: Phys. Pendel

Lösung der Dgl: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{amg}{J_A}}}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Pendel: Schwingungsdauer

Federpendel / Fadenpendel / Phys. Pendel:

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$:
Federpendel: $\sqrt{k/m}$
Fadenpendel: $\sqrt{g/L}$
Phys. Pendel: $\sqrt{a \cdot m \cdot g / J_A}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Klausuraufgabe

Berechnen Sie die Frequenz,
mit der ein Zylinder schwingt

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$:
Phys. Pendel: $\sqrt{a \cdot m \cdot g / J_A}$

am Rand aufgehängt
Radius R = Abstand S-A, Masse m
→ $J_S = m R^2 / 2$, $J_A = J_S + m R^2 = 3/2\ m R^2$ (Steiner)

$\omega = 2\pi f = \sqrt{R\ m\ g / (3/2\ m\ R^2)} = \sqrt{2g/3R}$

Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Molekül-Anregungen (Ausblick)

für 2-atomige Moleküle

- Translation: E_{Trans}
- Rotation: E_{Rot}
- Schwingung: E_{Osz}

typische Möglichkeiten, Energie in ein System zu pumpen

→ Spezifische Wärme $c_v = (\, dU \,/\, dT \,)_V$

Hochschule für Angewandte
Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

2. Freie gedämpfte Schwingung

zusätzlich Reibung: Versuch: Federp. ged.

Dgl: $\boxed{\ddot{z} + \frac{\kappa}{m}\dot{z} + \frac{k}{m} z = 0}$

κ: Dämpfungskoeffizient

δ: Abklingkoeffizient $\boxed{\delta := \frac{\kappa}{2m}}$

→ $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ Versuch: Cassy-Federp.

Drei mögliche Lösungen

a) Schwingfall: $\delta < \omega_0$

$$\boxed{z(t) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)}$$

b) Aperiodischer Grenzfall: $\delta = \omega_0$

$$\boxed{z(t) = z_1 (1 + \delta t) e^{-\delta t}}$$

c) Kriechfall: $\delta > \omega_0$

Simulation: ged. + MATLAB /
Stange + Doppelpendel (Chaos)

Klausuraufgabe

Ein Federpendel (m = 150 g) wird um 5 cm ausgelenkt und losgelassen. Nach einer Periodendauer von 2 s wird ein Maximalausschlag von 4 cm gemessen.

Berechnen Sie den Abklingkoeffizienten und die Federkonstante!

Lösung:

$$z(t) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta t) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$z(0) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\varphi) = 5 \text{ cm}$$

$$z(T) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta T) \sin(\omega T + \varphi) = z_1 \frac{\omega_0}{\omega} \exp(-\delta T) \sin(\varphi) = 4 \text{ cm}$$

$$(\text{da} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \sin(2\pi + \varphi) = \sin(\varphi))$$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Klausuraufgabe

$$q = \frac{z_0}{z_1} = \exp(\delta T) = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\ln 5/4}{T} = \ 0.11 \ 1/\mathrm{s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad k = m\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2\right) = \text{ca. } 1 \ \mathrm{kg/s^2}$$

k = 1.4823 N/m

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

3. Erzwungene Schwingung

mit äußerer Anregung Versuch: Federp. Hand

Dgl: $\boxed{\ddot{z} + \frac{\kappa}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\sin\omega_e t}$

ω_e : Frequenz der äußeren (period.) Anregung
d.h. von außen wird Energie hineingepumpt

Lösung: $\boxed{z(t) = A\sin(\omega_e t + \varphi)}$

Versuch: Cassy-Feder / MATLAB-Einschw. / Autos / Video

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Amplituden-Resonanz-Funktion

Verhalten bei Änderung von ω_e:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\delta\omega_e)^2}}$$

Resonanz $\omega_e = \omega_{res}$
in der Nähe von ω_0:

$$\omega_{\mathrm{Res}} := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Güte: $Q = \dfrac{A(\omega_{\mathrm{Res}})}{A(\omega_e \approx 0)}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Maschinenbau und Produktion

Klausuraufgabe:

Ein Jeep (Masse m_j=2700 kg) mit defekten Stoßdämpfern senkt sich bei Zuladung von Personen und Gepäck (Masse m_{zu}=500 kg) um s=6 cm. So beladen fährt er über eine Wüstenpiste mit regelmäßigen Querwellen in d = 5 m Abstand.

Bei welcher Geschwindigkeit wird den Insassen übel?

Lösungsidee: Resonanz-Phänomen

1. Berechnung der Federkonstante aus Absenkung
   $k \cdot s = F = m_{zu} \cdot g$
   → k = 500kg*9.81 m/s² / 0.06m = 81 750 kg/s²
2. Eigenfrequenz des Systems: $\omega_0 = (k/(m_J+m_{zu}))^{1/2}$ = 5 Hz
3. Äußere Anregung: $v = d/T = d \cdot f = d * \omega_0 / 2\pi$ = 4 m/s

Lösung: v = 4 m/s = 14.5 km/h