## Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen.')

Von H. Blasius in Berlin.

1) Bei den Interpolationsformeln der Hydraulik, die die Druckverteilung in bewegtem Wasser betreffen, wählt man als Ansatz die Proportionalität der Druckhöhe  $h=\frac{p}{\gamma}$  zur Geschwindigkeitshöhe  $\frac{v^2}{2\,g}$ . Die Kräfte werden dann proportional zu den vorkommenden Flächen F:

$$h = c \frac{v^2}{2g} \qquad K = k \gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

Die Beiwerte c und k in den Ansätzen dieser Form werden seltener auf theoretischem Wege, sondern meist durch Eichung oder durch den Modellversuch bestimmt. Hierbei ist nun zu beachten, daß c und k nur dann wirklich unveränderlich sind - also für zwei Vorgänge denselben Wert annehmen -, wenn der Stromlinienverlauf bei beiden Vorgängen ähnlich ist; andernfalls sind sie sowohl von der Geschwindigkeit wie vom Maßstab geometrisch ähnlicher Anordnungen abhängig. Bei Modellversuchen für Schiffe ist z. B. nur dann Aehnlichkeit der Wellenbildung vorhanden, wenn die Geschwindigkeiten der verglichenen Vorgänge im Verhältnis der Wurzeln aus dem Längenverhältnis der ähnlichen Körper stehen. Diese von Froude in die Praxis eingeführte Modellregel wird abgeleitet aus der Erwägung, daß die Beschleunigungen in der Wasserströmung bei den verglichenen Vorgängen gleiche Werte haben müssen, weil die Schwerebeschleunigung bei beiden dieselbe ist. - Man kann diese Regel auch so ausdrücken, daß der Beiwert k Funktion von  $\frac{v^2}{2gl}$ , vom Verhältnis der Geschwindigkeitshöhe zu irgend einer Längengröße am Schiff bezw. Modell, ist; man schreibt dies:

$$k = k \left( \frac{v^2}{2 g l} \right),$$

denn  $\frac{v^2}{2\,g\,l}$  bleibt unverändert, wenn v sich wie die Wurzel aus l ändert, und in diesem Falle soll sich ja auch k nicht ändern; zu jedem Wert von  $\frac{v^2}{2\,g\,l}$  gehört nur ein Wert von k.

Die Aussage, daß der Beiwert  $k=\frac{2\,g\,K}{\gamma\,Fv^2}$ 

Die Aussage, daß der Beiwert  $k=\frac{2\,g\,K}{\gamma\,F\,v^2}$  Funktion von  $\frac{v^2}{2\,g\,l}$  ist, entspricht auch dem allgemeinen physikalischen Grundsatz, daß nur Gleichungen zwischen dimensionslosen Größen auftreten, und könnte auch unmittelbar durch dieses Gesetz begründet werden  $^2$ ). Maßgebend für die Anzahl der »reinen Zahlen«, die aus den vorkommenden Längen und Geschwindigkeiten gebildet werden können, sind die in den Grundgleichungen auftretenden Stoffkonstanten und allgemeinen Konstanten, in diesem Falle  $\gamma$  und g.

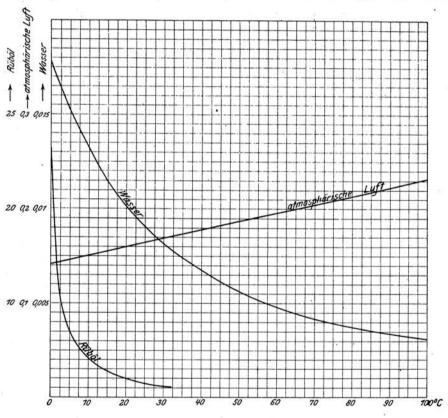
2) Das vorstehende bekannte Achnlichkeitsgesetz gilt seiner Ableitung nach nur für Vorgänge, bei denen neben der Trägheit die Schwerkraft auftritt. Es versagt, wenn es sich um Reibungsvorgänge handelt. Hier tritt z. B. die Schubspannung der laminaren Reibung

$$\tau_{xy} = \mu \, \frac{\partial u}{\partial y}$$

als neue Kraft auf (die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sind hier als Funktionen der Koordinaten x, y, z betrachtet)

## Fig. 1.

Reibungskoeffizient r in  $\mathrm{cm}^2/\mathrm{sk}$  für Rüböl, Luft beim Druck von 1  $\mathrm{kg/cm}^2$  und Wasser.



und mit ihr natürlich auch Normalspannungen von ähnlicher Art, die wir aber nicht hinschreiben wollen, da sie nichts Neues bieten. Die neue Stoffkonstante  $\mu$ , statt deren man auch häufig den »kinematischen Reibungskoeffizienten«  $\mathbf{v} = \frac{g\,\mu}{\gamma}$  einführt, ist abhängig von der Temperatur.  $\mathbf{v}$  hat die Dimension Länge² und ist z. B. für Wasser bei  $10^{\circ}$  C:  $\mathbf{v} = 0,0131 \frac{\text{cm}^2}{\text{sk}}$ , bei  $20^{\circ}$  C:  $\mathbf{v} = 0,0101 \frac{\text{cm}^2}{\text{sk}}$  (s. Fig. 1). Bei Vorgängen, bei denen diese innere Reibung eine Rolle spielt, dagegen eine freie Oberfläche nicht auftritt, kann man nun das neue Aehnlichkeitsgesetz aufstellen, daß die Konstanten c und k der Druckhöhen und Kräfte Funktionen von  $\frac{vl}{v}$  sind, geschrieben:

<sup>.1)</sup> Auszug aus einem demnächst in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten erscheinenden Aufsatze.

<sup>2)</sup> Prandtl, Ztschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1910.

$$k = k \left( \frac{v \, l}{v} \right),$$

wobei v und l die jeweils maßgebenden Geschwindigkeiten und Längen bedeuten. Dieses Gesetz ist von Reynolds 1) aus dem Vergleich der in den Grundgleichungen auftretenden Trägheits- und Reibungskräfte in folgender Weise abgeleitet

3) Die Trägheitskräfte, die in den Eulerschen Gleichungen (»Hütte« 20. Aufl. S. 252) vorkommen, sind vom Typus:

$$\frac{\gamma}{g} u \frac{\partial u}{\partial x},$$

das Gefälle der Druckhöhe

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial x}$$
,

die Reibungskraft vom Typus

$$\frac{\gamma}{a} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$$
.

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und die Druckhöhe h sind dabei als Funktionen der Koordinaten x, y, z gedacht. Wir nehmen nun an, daß wir - durch Eichung am Modell — einen Vorgang (Index 1) kennen, bei dem diese drei Kräfte gemäß den Eulerschen Gleichungen im Gleichgewicht sind, und wir gehen nun zum ähnlichen Vorgang (Index 2) über, indem wir alle Längen, also besonders die Koordinaten, im Verhältnis  $\frac{t_2}{l_1}=f_l$  vergrößern und ebenso die auf ähnliche Koordinatensysteme bezogenen Geschwindigkeiten und Druckhöhen im Verhältnis fv bezw. fn ändern. Bei einer Aenderung der Konstanten  $\gamma,\ g,\ v,$  also beim Uebergang zu andern Flüssigkeiten, sind die Vergrößerungsverhältnisse  $f_7 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ , ebenso  $f_\theta$  und  $f_\tau$  zu berücksichtigen <sup>2</sup>). Dann ändern sich die oben aufgezählten Kräfte in den Verhältnissen:

$$\frac{f_{\Upsilon}f_{v}^{2}}{f_{o}f_{i}} \qquad \frac{f_{\Upsilon}f_{h}}{f_{i}} \qquad \frac{f_{\Upsilon}f_{v}f_{v}}{f_{o}f_{i}^{2}}.$$

Nun bleibt das Gleichgewicht zwischen den Kräften beim Vorgang (2) nur dann gewahrt, wenn sich alle Kräfte im gleichen Verhältnis geändert haben. Die Gleichsetzung der drei Verhältnisse ergibt vereinfacht:

$$\frac{f_v f_l}{f_v} = 1 \qquad f_h = \frac{f_v^2}{f_o} \, .$$

 $\frac{f_vf_l}{f_r}=1 \qquad \qquad f_h=\frac{f_c^2}{f_g} \ .$  Aus der ersten Gleichung folgt, daß die Vorgänge nur dann ähnlich sind, wenn vi bei den verglichenen Vorgängen denselben Wert hat; denn aus  $\frac{f_v f_l}{f_v} = 1$  folgt:  $\frac{v_1 l_1}{r_1} = \frac{v_2 l_2}{r_2}$ . Aus der zweiten ist abzulesen, daß in diesem Fall auch das Verhältnis  $h: \frac{v^2}{2g}$  dasselbe ist. Die »Konstanten«  $c = \frac{2gh}{v^2}$  und k (Absatz 1) sind also nur dann wirklich konstant, wenn die unabhängig veränderlichen Geschwindigkeiten und wenn die unabhängig veränderlichen Geschwindigkeiten und Längen bei den verglichenen Vorgängen dasselbe Produkt vl ergeben; also

$$c = \frac{2 g h}{v^2}$$
 ist Funktion von  $\frac{v l}{v}$ ,

geschrieben: 
$$c = c\left(\frac{vl}{v}\right)$$
; ebenso:  $k = k\left(\frac{vl}{v}\right)$ .

4) Wir haben noch anzumerken, daß bei dem oben gedachten Uebergang zum ähnlichen Vorgang sowohl die Kontinuitätsgleichung wie die Grenzbedingungen erfüllt bleiben, wenn man als Grenzbedingung das Haften der Flüssigkeit an den Wandungen einführt. - Ferner ist zu betonen, daß die Vergrößerung im Verhältnis fi alle Längen betrifft: neben der soeben festgestellten Abhängigkeit von  $\frac{vt}{v}$  bleiben die Beiwerte c und k also noch von der Form der Anordnung abhängig, bei zwei oder mehreren unabhängigen Längen-

größen demnach vom Verhältnis dieser Längen. In den Ausdruck  $\frac{vl}{v}$  tritt dabei irgend eine passend gewählte Längeein. - Schließlich ist in Uebereinstimmung mit Absatz 1 festzustellen, daß  $\frac{vl}{\nu}$  neben den Beiwerten c und k die einzige dimensionslose Größe ist, die sich aus den vorhandenen Stoffkonstanten bilden läßt. Die allgemeine Konstante gkommt nicht vor, wenn keine freie Oberfläche vorhanden ist. - In etwas andrer Form ist das Gesetz bei Nußelt') dargestellt. Es sind dort die vollständigen Eulerschen Gleichungen hingeschrieben, während hier der Uebersichtlichkeit wegen nur typische Glieder herausgegriffen sind. Dagegen leitet Nußelt das Gesetz nur für den Fall des Potenzansatzes

$$c = a\left(\frac{vl}{r}\right)$$

ab, eine Einschränkung der Funktionsform, die durchaus nicht im Wesen der Sache liegt; vielmehr sagt das Reynoldssche Gesetz über die Form der Abhängigkeit  $c\left(\frac{vl}{v}\right)$  gar-

5) Vorgänge, bei denen dieses Gesetz in Kraft tritt, sind der Druckverlust in Röhren, die Oberflächenreibung an Platten, sowie die Drücke und Kräfte, die eingetauchte Körper in tiefem Wasser ohne freie Oberfläche erfahren. Letzteres trifft also besonders beim Widerstand von Ballonkörpern in Luft zu. Denn die Ausdehnung des »Kielwassers«, die Lage seiner Ablösungsstelle2) und die Drücke im Kielwasser sind nur bestimmt durch die Reibungskräfte und die Trägheit. Bei allen diesen Vorgängen sind die Beiwerte der hydraulischen Formeln Funktionen der Reynoldsschen Zahl  $\frac{vt}{v}$ . Daraus, daß die Gleichheit des Produktes  $\frac{vt}{v}$  für die Aehnlichkeit der Vorgänge und die Gleichheit der Bei-werte maßgebend ist, folgt, daß bei Modellversuchen die »korrespondierenden Geschwindigkeiten« im umgekehrten Verhältnis der Längen zu wählen sind: Sind die Abmessungen des Modells 1/10 der Wirklichkeit, so muß man die Geschwindigkeiten im Modell auf das Zehnfache der in Wirklichkeit vorhandenen Geschwindigkeiten steigern, während sie bei Betrachtung von Schwerkraftvorgängen im Verhältnis  $\frac{1}{V_{10}}$  herabgesetzt werden konnten. Der Beiwert v im Nenner der Zahl  $\frac{vt}{\nu}$  enthält den Einfluß der Temperatur und wird auch dann für die Berechnung der Modellgeschwindigkeiten wesentlich, wenn man den Modellversuch mit andrer Flüssigkeit anstellt. Wenn man z. B. bei Luft von der Zusammendrückbarkeit absieht, die erst bei hohen Geschwindigkeiten in Frage kommt, so unterscheidet sie sich von Wasser nur durch das spezifische Gewicht und die Zähigkeit, unterliegt also den hier vorgenommenen Aehnlichkeitsbetrachtungen. Bei-Flüssigkeiten, bei denen v kleine Werte hat, erreicht man schon bei geringeren Geschwindigkeiten oder geringerem Maßstab hohe Reynoldssche Zahlen. Diese Ueberlegung läßt es als vorteilhaft erscheinen, Modellversuche für Luftschiffe in Wasser vorzunehmen, da  $\nu$  für Wasser nur  $^{1}/_{10}$  bis  $^{1}/_{20}$ . von dem für Luft ist (vergl. Fig. 1). Flüssigkeiten mit noch geringerem v, die also für Modellversuche bei Reibungsvorgängen besonders geeignet sind, sind Quecksilber, Schwefelkohlenstoff, Aether, Methylalkohol3).

Für Vorgänge, bei denen sowohl Schwerkraft wie Reibung eine Rolle spielen, gilt bei gleicher Flüssigkeit überhaupt kein Aehnlichkeitsgesetz, da in solchem Falle sowohl  $\frac{v^2}{2 g l}$  wie  $\frac{v l}{\nu}$  beim Modell und in Wirklichkeit denselben Wert haben müßten. Nimmt man jedoch verschiedene Flüssigkeiten, so folgt aus der Auflösung der Gleichungen

$$\frac{v_1^2}{2 g l_1} = \frac{v_2^2}{2 g l_2} \qquad \frac{v_1 l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 l_2}{r_2} \,,$$

<sup>1)</sup> Reynolds: Phil. Transact. of the Royal Soc. of London Bd. 174 (1883) S. 935.

<sup>2)</sup> Aenderung von g kommt nur beim Uebergang zu anderem Maßsystem vor.

<sup>1)</sup> Mitteil. über Forschungsarb. Heft 89.

<sup>2)</sup> nach der Prandtlschen Theorie. Vergl. Föppl, »Techn. Mechanik« Bd. VI S. 371.

<sup>3)</sup> Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 2. Aufl. 1894 Tab. 110c, 3. Aufl. 1903 Tab. 37 bis 40.

daß auch für Vorgänge mit Schwere und Reibung ein Modellversuch im Maßstabe

$$\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{2/3} \qquad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/3}$$

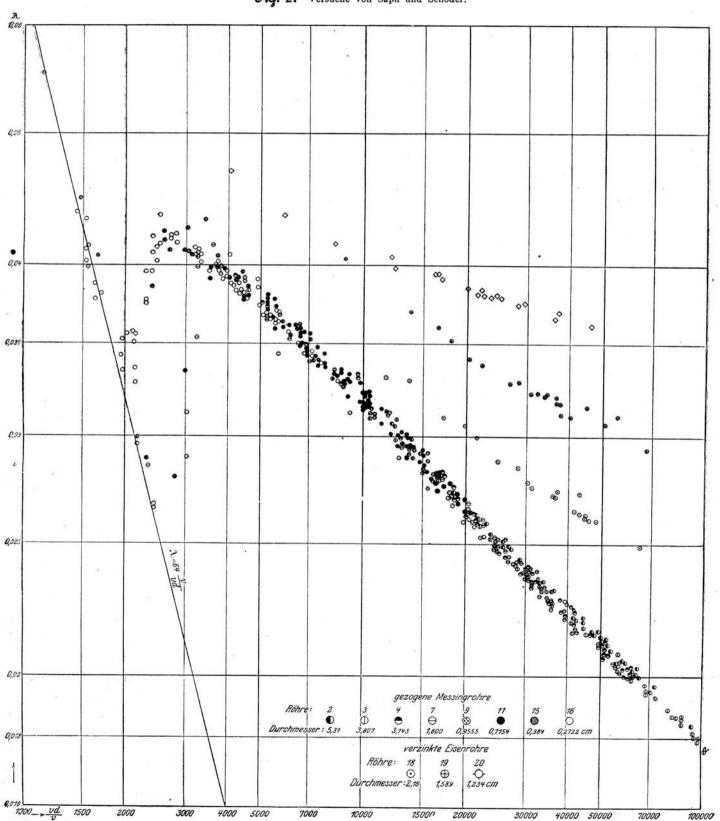
möglich wird.

6) Wir wollen uns nun den Bestätigungen des Aehnlichkeitsgesetzes durch den Versuch zuwenden, und zwar zunächst für den Fall des Druckverlustes in Röhren. In der Formel

 $h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2 g},$ 

in der l die Länge der Meßstrecke und d den Durchmesser des Rohres bedeutet, muß der Beiwert  $\lambda$  Funktion von  $\frac{vd}{\nu}$  sein. Es liegt hier nämlich zunächst der in Absatz 4) er wähnte Fall vor, daß zwei Längen l und d auftreten, so daß das Verhältnis  $h:\frac{v^2}{2g}$  Funktion von  $\frac{l}{d}$  und  $\frac{vl}{\nu}$  oder, wie man will, von  $\frac{l}{d}$  und  $\frac{vd}{\nu}$  ist. Die Proportionalität von h zur Meßlänge l erscheint selbstverständlich, wenn man sich in einer langen Rohrleitung genügend weit vom Eintritt ent-

Fig. 2. Versuche von Saph und Schoder.



fernt befindet; daher ist h in obigem Ansatz sögleich zu  $\frac{l}{a}$  proportional gesetzt, und es bleibt dann nur der Durchmesser als maßgebende Länge übrig, so daß  $\lambda$  Funktion von  $\frac{v\,d}{v}$  wird. Auf Grund dieser Ueberlegungen tragen wir alle vorliegenden Versuche in ein Diagramm ein, dessen Abszisse  $\frac{v\,d}{v}$  und dessen Ordinate  $\lambda = \frac{2\,g\,d\,h}{v^2\,l}$  ist.

Jedes untersuchte Rohr, bei dem die Werte von  $\lambda$  bei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen sind, liefert darin eine Kurve, und die Bestätigung des Aehnlichkeitsgesetzes ist darin zu suchen, daß alle diese Kurven zusammenfallen.  $\lambda$  hat z. B. bei einem Rohr von 5 mm Dmr. und einer Geschwindigkeit von 10 m/sk denselben Wert wie bei d=100 mm und v=0.5 m/sk, denn die Reynoldssche Zahl  $\frac{vd}{v}$  ist, bei einer Temperatur von  $15^{0}$ C mit v=0.0115 cm²/sk, in beiden Fällen  $\frac{1000\cdot0.5}{0.0115}=\frac{50\cdot10}{0.0115}=43\,500$ . v und d sind hierbei in Zentimetern gemessen, da auch v in cm²/sk abgelesen ist.

7) In Fig. 2 ist eine Auswahl aus den umfangreichen Versuchsreihen von Saph und Schoder<sup>1</sup>) an gezogenen Messingrohren und verzinkten Eisenrohren aufgetragen2), und man erkennt daraus für die ersteren, daß tatsächlich alle Beobachtungspunkte auf derselben Kurve liegen. Die Abweichungen betragen ± 1,7 vH. Damit ist für diese Rohre das Gesetz bestätigt. Die Kurven für die verzinkten Eisenrohre liegen dagegen höher, und zwar um so mehr, je kleiner der Durchmesser ist. Für solche Rohre, bei denen die Rauhigkeit der Oberfläche eine Rolle spielt, bedarf das Gesetz einer Erweiterung. In der Ueberlegung von Absatz 6) sind nicht nur l und d als maßgebende Längen zu betrachten, sondern auch die Größe & der Unebenheiten, die Rauhigkeit.  $\lambda$  wird dann Funktion nicht nur von  $\frac{vd}{v}$ , sondern auch von  $\frac{\epsilon}{d}$ , vom Verhältnis der Rauhigkeit zum Durchmesser. Hier tritt der Durchmesser d also noch in einer andern unabhängigen Zahl auf, und die Kurven für verschiedene dfallen bei gleichem ε nicht mehr zusammen. Umgekehrt ist daher die Uebereinstimmung der Kurven bei den Messingrohren als Kennzeichen dafür aufzufassen, daß wir hier den

8) Die Frage, durch welchen Funktionsausdruck  $\lambda$  als Funktion von  $\frac{v\,d}{\nu}$  dargestellt wird, wird vom Aehnlichkeitsgesetz nicht beantwortet. Der Versuch zeigt hier, daß bis zu dem Wert  $\frac{v\,d}{\nu}=2000$ 

Fall  $\varepsilon = 0$ , also den Fall ganz glatter Wandung vor uns haben. Nur mit diesem Fall wollen wir uns zunächst be-

das Poiseuillesche Gesetz der laminaren Strömung

$$h = 32 \frac{v l v}{g d^2}$$

befolgt wird, hier ist

$$\lambda = 64 \frac{v}{v d}.$$

Zwischen

Von

schäftigen.

$$\frac{v d}{}$$
 = 2000 und 3000

findet der bekannte Uebergang zu turbulenter Bewegung statt.  $\lambda$  wächst dabei von

$$\lambda = 0.032 \text{ bis } 0.042.$$

$$\frac{v d}{v} = 3000$$

1) Transact. of the American Society of Civ. Eng. Bd. 51 (1903) S. 253 ab nimmt  $\lambda$  nach einer andern Kurve ab. Ein neuer Uebergang, wie Biel ') behauptet, findet nicht mehr statt. Seine zweite Grenzgeschwindigkeit, die etwa bei 12000 liegen müßte, ist offenbar nur die Grenze seiner angenommenen Annäherungsformel, deren Wahl ich nicht für glücklich halte. Eine geeignete Interpolationsform für die Kurve der turbulenten Bewegung  $\left(\frac{v d}{v} > 3000\right)$  scheint die schon häufig vorgeschlagene Potenzform zu sein, da im logarithmischen Maßstab die Kurve als Gerade erscheint. Die Interpolation liefert:

 $\lambda = 0.3164 \sqrt[4]{\frac{v}{v d}}.$ 

Werte von 2.

v d	2			
	beobachtet von Saph und Schoder			Formel
	untere Grenze	Mittel	obere Grenze	Formel
3 000	0,0410	0,0418	0,0426	0,0428
5 000	0,0370	0,0378	0,0386	0,0376
7 000	0,0342	0,0349	0,0356	0,0346
10 000	0,0315	0,0321	0,0327	0,0316
15 000	0,0283	0,0288	0,0293	0,0286
20 000	0,0262	0,0266	0,0270	0,0266
25 000	0,0247	0,0251	0,0255	0,0252
30 000	0,0236	0,0240	0,0244	0,0240
40 000	0,0220	0,0224	0,0228	0,0224
50 000	0,0209	0,0212	0,0215	0,0212
60 000	0,0199	0,0202	0,0205	0,0202
70 000	0,0193	0,0195	0,0197	0,0195
80 000	1	0,0190		0,0188
90 000		0,0185		0,0183
100 000		0,0179		0,0178
125 000				0,0168
150 000				0,0161
175 000	1			0,0155
200 000			1	0,0149
250 000	I t			0,0141
300 000	1		2	0,0135
400 000	1			0,0126
500 000				0,0119
750 000	1			0,0108
000 000	1		1	0,0100

In der Zahlentafel sind die von Saph und Schoder beobachteten Werte der Formel gegenübergestellt. Eine Vorstellung von der geringen Streuung der Messungen geben die aus Fig. 2 entnommenen oberen und unteren Grenzen des Streifens. Auch die von Saph und Schoder selbst gegebene Interpolation enthält die vierte Wurzel von vd, dagegen hat sie nicht die Größe v eingeführt, in der der Einfluß der Temperatur zum Ausdruck kommt, s. Fig. 1. Diesen Einfluß hat keine der vorhandenen Formeln richtig zum Ausdruck gebracht, während die Abhängigkeit von vd in vielen, z. B. in der Langschen, wiederkehrt, ohne daß die Formel unter bewußter Anwendung des Aehnlichkeitsgesetzes angesetzt wäre. Meist gehen die Verfasser dieser Interpolationen von irgendwelchen vorgefaßten Meinungen über die Funktionsform aus, so z. B. Biel, dessen Formel für Rauhigkeit = 0 mit dem Reynoldsschen Gesetz nicht verträglich ist. Es macht aber das Interpolationsgeschäft bedeutend einfacher und sicherer, wenn man λ von vornherein nur als Funktion der einen Veränderlichen  $\frac{v d}{v}$  aufträgt und dann erst interpoliert.

9) Nachdem durch die Saph-Schoderschen Versuche für glatte Rohre das Gesetz bestätigt ist, ist eine kurze Versuchsreihe von Nußelt<sup>2</sup>) für Druckluft zu beachten, die in Fig. 3 auf unser Diagramm umgerechnet ist. Der Vergleich mit der eingetragenen Kurve lehrt, daß die zehn Beobachtungs-

<sup>&</sup>lt;sup>2)</sup> Die Figur ist im logarithmischen Maßstab gezeichnet, wodurch die Abszissenwerte bei kleinem  $\frac{v\,d}{\nu}$ , wo die meisten Punkte aufgetragen sind, weiter auseinanderrücken. Außerdem zeigt der logarithmische Maßstab das Bestehen eines Potenzgesetzes dadurch an, daß die Kurve eine gerade Linie wird.

<sup>1)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 44.

<sup>2)</sup> desgl. Heft 89.

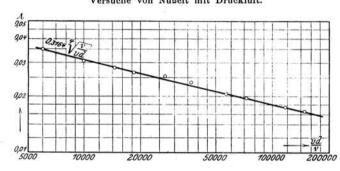
punkte sich der oben für Wasser aufgestellten Interpolationsformel ebenfalls anschließen:

$$\lambda = 0.3164 \sqrt[4]{\frac{1}{\nu}}.$$

Hierdurch ist die Aehnlichkeit auch zwischen verschiedenen Flüssigkeiten, Wasser und Luft, bewiesen. Weiter muß gefragt werden, welche Stoffe als glatt zu betrachten sind. Es kommen hier in Betracht die Versuchsreihen von Reynolds an zwei Bleirohren und von Lang an einem Kupferrohr. In Ergänzung dieser Reihen habe ich dann an der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin Messungen an Bleirohren, Glasrohren und Messingrohren durchgeführt. Das Ergebnis ist, daß gezogene Rohre aus Blei, Messing und Kupfer als glatt betrachtet werden können. Für sie gilt also:

$$\lambda = 0.3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{n d}}.$$

Fig. 3.
Versuche von Nußelt mit Druckluft.



Dasselbe gilt auch für Glasrohre mit der Bemerkung, daß diese fast stets langsam veränderlichen Durchmesser haben, so daß der Unterschied der Geschwindigkeitshöhen an den Meßstellen, der das Druckgefälle erhöhen oder erniedrigen kann, gesondert zu berücksichtigen ist. - Der Nachweis, daß der Einfluß der Temperatur durch v richtig wiedergegeben ist, wurde durch Versuche mit Wasser von 80°C geführt. -Schließlich wurde festgestellt, daß das Druckgefälle kurz hinter dem Eintritt in das Rohr um einige Prozent größer ist als in größerer Entfernung, so daß für genaue Messungen eine Eintrittstrecke von mindestens 50 Durchmessern erforderlich ist. Ein ausführlicher Bericht über diese Versuche sowie über die Bearbeitung der vorhandenen Versuche wird in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten erscheinen. -Zur Klärung der Frage nach dem Druckverlust in rauhen Rohren können die Versuche von Darcy dienen, die allerdings zum Teil eine beträchtliche Streuung der Punkte aufweisen. Weitere systematische Versuchsreihen sind hier erforderlich: Es muß in dem Diagramm, dessen Abszisse  $\frac{vd}{}$ und dessen Ordinate à ist, eine Kurvenschar festgelegt werden, auf der  $\frac{\varepsilon}{d}$  Parameter ist. Zur Schätzung des Rauhigkeitsgrades ε sind verschiedene Stoffe zu prüfen. Ein Bild von dem Aussehen dieses Diagrammes gibt Fig. 2, wo außer der Kurve für ε = 0 drei weitere Kurven der Schar festgelegt sind. Der Praxis wäre mit der Ausdehnung dieses Diagrammes bis etwa  $\frac{vd}{}$  = 1 000 000 genügend gedient. Diese Zahl entspricht z. B. einem Durchmesser von 50 cm und einer Geschwindigkeit von 200 cm/sk bei 20° C.

10) Außer für den Druckverlust in Rohren muß das Aehnlichkeitsgesetz von Absatz 5) auch für die Oberflächenreibung an Platten gelten, wobei jedoch nicht dieselbe Form der Gesetzmäßigkeit zu bestehen braucht. Versuche von Gebers  $^{1}$ ) an Platten der Länge l und der benetzten Fläche F, die mit der Geschwindigkeit v durchs Wasser gefahren wurden, sind nach der Formel

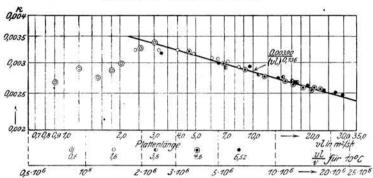
$$W = \varkappa \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

dargestellt;  $\varkappa$  ist als Funktion von vl in Fig. 4 aufgetragen, und man erkennt auch hier, daß die von verschiedenen Plattenlängen herrührenden Punkte auf dieselbe Kurve fallen. Die von der kleinsten Platte herrührenden Punkte deuten einen Uebergang zu laminarer Bewegung an, ähnlich wie in Absatz 8 besprochen wurde; sonst ist, wie die logarithmische Auftragung erkennen läßt, das Potenzgesetz eine genügende Interpolation:

$$x = \frac{0,00390}{(v l)^{0,136}} (v l \text{ in } m^2/\text{sk}).$$

## Fig. 4.

Versuche von Gebers mit Platten.



Die Angabe der Temperatur fehlte bei den Versuchen daher konnte nicht  $\frac{vl}{\nu}$  eingeführt werden. Nimmt man  $10^{6}\,\mathrm{C}$  an, was nach mündlicher Mitteilung wahrscheinlich ist, so gilt die in Fig. 4 beigesetzte Skala und die Formel

$$\times = 0,0246 \left(\frac{\nu}{v \, l}\right)^{0,136}$$

(v. v. l im gleichen Maßsystem zu messen).

Für verschiedene Temperaturen stehen also diese Reibungswiderstände im Verhältnis der 0,136 ten Potenzen der aus Fig. 1 abzulesenden Werte von  $\nu$ .

Ueber den Luftwiderstand von Drähten liegen Versuche aus der von Prof. Prandtl geleiteten Versuchsanstalt in Göttingen<sup>2</sup>) vor, die das Aehnlichkeitsgesetz ebenfalls bestätigen.

## Zusammenfassung.

1) Allgemeines über Aehnlichkeitsgesetze. 2) Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen. 3) Beweis aus den hydrodynamischen Grundgleichungen. 4) Ergänzungen hierzu. 5) Aufzählung von Anwendungsgebieten. 6) Anwendung auf Reibung in Rohren. 7) Bestätigung für glatte Rohre und Erweiterung für rauhe Rohre. 8) Interpolationsformeln. 9) Weitere Bestätigungen für Rohrreibung, insbesondere für den Vergleich verschiedener Flüssigkeiten und Temperaturen. 10) Bestätigungen bei Oberflächenreibung und Widerstandsmessungen.

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup> Gebers: Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Wasserwiderstandes gegen bewegte Körper. Berlin 1908. Verlag des »Schiffbau«.

O. Föppl: Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt
 S. 259.