HÖHERE MATHEMATIK

Mathematische Grundlagen vom technischen Standpunkt

**aus analytischer Geometrie
Differential- und Integralrechnung
Differentialgleichungen und Reihen**

von

Dr Heinrich Blasius

Oberstudienrat i R der Ingenieurschule Hamburg

mit 168 Figuren und 78 Aufgaben

1954

BOYSEN + MAASCH VERLAG
HAMBURG

VORWORT

1. Zur Beherrschung der Natur muß man sie erforschen. Dazu muß man rechnen können, denn die Naturgesetze sind Beziehungen zwischen Größen. Das wußte schon Pythagoras. Mathematik ist also die Lehre von den Rechenoperationen, den Umformungen und Auflösungen gegebener Beziehungen. Sie ist auch als solche entstanden: Geometrie ist schon dem Wort nach Vermessungswesen, auch Zeichenkunst, Projektionslehre. Für die Differentialgleichungen interessierte man sich wegen der Schwingungen, der Wellen, der Biegungslinien. — Wo Mathematik zu selbständiger Fragestellung gelangt, geschieht es durch Verallgemeinerung ursprünglicher Fragen: Man fragt nach dem vollständigen System der Formeln, die zur Lösung einer Gruppe von Aufgaben (beschleunigte Bewegung, sphärisches Dreieck) nötig sind. Man fragt nach der Möglichkeit der Lösung vorkommender Aufgaben mit gewissen Hilfsmitteln, eine durchaus praktische Frage, aber eine abgeleitete, keine ursprüngliche.

2. Mathematik hat eine eigenartige Entwicklung durchgemacht: Nachdem produktive Geister, wie Euler und Gauß, viele Hilfsmittel zur Lösung praktischer Aufgaben geschaffen hatten, trat eine gewisse Erschöpfung ein. Bei Potenzen und Sinus, bei Kegelschnitten und Rollkurven gibt es nichts mehr zu erfinden. Das Dreikörperproblem und die hydrodynamischen Gleichungen sind zu schwierig. — So verlegten sich die Mathematiker auf die philosophische Zergliederung ihrer Grundbegriffe, und es wurde Brauch, den Unterricht hiermit zu beginnen: die Planimetrie mit dem Begriff des Punktes und mit Erörterungen über das Parallelenaxiom, die Algebra mit der Unterscheidung rationaler und irrationaler Zahlen, die höhere Mathematik mit der Untersuchung der Differenzierbarkeit der beliebigen Funktion und der Konvergenz unendlicher Zahlenfolgen:

> Mein teurer Freund, ich rat euch drum,
> zuerst collegium logicum!

Aber solche Kritik ist nicht der Anfang der Wissenschaft, sondern ihre Vollendung. Zuerst muß der Mensch in der Welt eine Fülle von Tatsachen kennen lernen. Alsdann muß er mit diesen produktiv arbeiten, und wird dabei auch gewiß Fehler erkennen, sich durch Kontrollen sichern, also kritisch sein. Daraus erwächst dann allmählich die Kritik der Grundlagen, die Axiomatik, aber aus einem breiten Erfahrungsschatz. Kritik kann eben erst einsetzen, wenn etwas zu kritisieren da ist.

> Einer Mühle vergleich ich den Verstand,
> die mahlt, was an Korn sie geschüttet fand.
> Doch geschehen der Schüttungen keine,
> so reiben sich selber die Steine,
> und erzeugen Staub und Splitter und Sand.

3. Wem mathematische Begriffe definiert, wem Lehrsätze bewiesen werden, ehe etwas damit gemacht ist, der versteht zunächst garnicht, worum es sich überhaupt handelt. Das wird erst hinterher am Beispiel klar. Die Buchstaben a b x y der Algebra sind eben nicht „allgemeine Zahlen“, deren Gesetze erforscht werden, sondern Größen, die jeweils verschiedene, aber immer irgend eine Bedeutung haben. Sonst hätten sie keinen Sinn. Daß die mathematischen Beziehungen schließlich unabhängig sind von diesen Bedeutungen, ist eine Abstraktion, die man vollziehen muß, nachdem klar

geworden ist, was Alles damit erfaßt ist. Eine Abstraktion hat ihren Sinn nur durch ihre Erscheinungsformen, nicht a priori, trotz Platon, Thomas von Aquin und Kant. — Immer ist deshalb der Ruf nach Beispielen erhoben worden, und viele Lehrbücher bemühen sich, Beispiele aus den Anwendungen zu bringen. Nicht immer mit Glück: Wer zu Differentialgleichungen Beispiele über elektrische Schwingungen bringt, übersieht, daß die elektrischen Größen dem Hörer meist nicht bekannt, wenigstens nicht vertraut sind, daß umgekehrt der Elektrotechniker auf seine Mathematik wartet.

4. Vor allem aber genügt es nicht, an die Darstellung der Mathematik Beispiele anzuhängen. Man muß vom Beispiel ausgehen. Man muß zeigen, wie die Methoden zwecks Lösung von Aufgaben entwickelt sind. Die Begriffe müssen aus dem Beispiel erwachsen. Alle menschliche Arbeit hat ein Ziel; und dieses Ziel muß dem Schüler schon beim Beginn der Arbeit vor Augen stehen. Er muß sehen, wie durch das Ziel die Schritte der Lösung gefordert werden. Man darf ihn nicht „ins Blaue“ führen. Daß eine Umformung richtig ist, ist nicht schwer einzusehen. Aber wie man darauf kommt, das will der Hörer wissen. Die Schwierigkeit der Darstellung liegt nicht im Logischen, sondern im Psychologischen. Der pädagogische Aufbau ist eine zweckmäßige Aneinanderreihung von Gedanken, ein gezielter Wurf vom Ausgangspunkt zum gegebenen Endpunkt, nicht vom Anfangsort mit Anfangsgeschwindigkeit, wie ein planlos abgeworfener Stein. Man soll also die Beispiele nicht als Anwendungen behandeln, die gelöst werden mit vorher entwickelten Methoden. Die Beispiele enthalten vielmehr die Fragestellung die überhaupt erst zur Entwicklung der Methode führt. Den Sinn der Begriffe, die Notwendigkeit der Methode begreift man erst aus der Aufgabe heraus. Deshalb muß man von der Aufgabe ausgehen. So erzielt man eine erfrischende Gegenständlichkeit im Gegensatz zu begrifflichen Auseinandersetzungen.

> Ich sag es dir: Ein Kerl, der spekuliert,
> ist wie ein Tier, auf dürrer Heide
> von einem bösen Geist im Kreis herumgeführt,
> und ringsherum liegt schöne grüne Weide.

5. Der Lehrer denkt: Ich weiß, daß die Exponentialfunktion, die Potenzreihe, der Differentialquotient, die komplexe Zahl wichtig sind, deshalb muß ich sie meinem Schüler vortragen, damit er sie kann, wenn sie Vorkommen. Ich aber meine: Ich muß sie ihm Vorkommen lassen, muß sie vorkommend zeigen, damit er von vornherein weiß, wie es zu solchen Theorien kommt, und inwiefern sie wichtig sind. So bekommt er eine Vorstellung vom produktiven Denken. Sonst erzieht man nur Epigonen. Ich lasse also die Parabel, die Gleichung der Geraden erst Vorkommen, bei Bewegungsaufgaben, ehe ich systematisch über sie spreche. Die Potenzreihe folgt mir aus dem Bedürfnis fortschreitender Näherung. Das Bedürfnis des Rechnens mit komplexen Zahlen tritt auf zB bei der Gleichung III Grades. Erst danach werden die Rechenregeln entwickelt. — Zugegeben, daß das keine leichte pädagogische Aufgabe ist. Sie fordert hohe Konzentration vom Schüler, und noch mehr vom Lehrer. Aber es ist die pädagogische Aufgabe, die gelöst werden muß.

6. Bei jeder vorkommenden Aufgabe ist Mathematik erst der zweite Schritt. Der erste ist die Aufstellung der physikalischen Gleichungen aus der technischen Fragestellung. Erst dann kommt ihre Umformung, ihre Auflösung; und drittens dann die Auswertung der Lösung für das vorliegende Problem. Es ist erstaunlich, wie die Menschen sich danach drängen, Mathematik zu lernen, als hätten sie das ewige Leben darin. Sie lernen Potenzreihen und Arcussinus, komplexe Zahlen und unbestimmte Symbole; und können doch nichts damit anfangen, weil sie nicht gelernt

haben, zu den Ansätzen zu gelangen, die doch erst das Material zu den Umformungen sind. Es nützt garnichts, einen Differentialquotienten bilden zu können, — da steht er nun, — wenn man nicht vorher aus einer Aufgabe heraus die Funktion hat bilden können, deren Verlauf untersucht werden soll, und wenn man nicht nachher aus der Lösung das entnimmt, was für die praktische Aufgabe Wert hat, bis zur letzten Zahl.

7. Die Bildung von Differentialquotienten muß aber doch geübt werden, sagt der erfahrene Lehrer, und hat auch nicht Unrecht im Rahmen der abstrakten Darstellung. Aber Verständnis ersetzt Übung, — und Übung ersetzt Verständnis. Wer von der Ableitung des Differentialquotienten des Produkts oder der zusammengesetzten Funktion nicht nur das Ergebnis sich merkt, sondern den Gedanken, dem wird im gegebenen Fall auch der Gedanke gegenwärtig sein. So wird er grundsätzliche Fehler von vornherein vermeiden. Umgekehrt, wer Logarithmenrechnung nur mechanisch geübt hat, der weiß nachher nicht mehr, daß solche Zahlen Potenzexponenten sind, und versagt, wenn mal der Logarithmus selbst in der Formel auftritt, besonders wenn er auch noch negativ ist. — Gegen Flüchtigkeitsfehler des Schülers aber soll man tolerant sein. Diese Übung kommt mit der Zeit. Das soll man nicht erzwingen. Mit der Zeit kommen schon genügend viele Differentialquotienten vor, besonders wenn man die Aufgaben nicht nur auf eine Weise lösen läßt. Es ist ja gerade reizvoll, zu sehen, wie auf verschiedenen Wegen dasselbe herauskommt. So kommt Übung genug, ohne daß man neue physikalische und technische Anschauungen entwickeln müßte.

8. Bei der Durchführung dieser Idee kommt es nun nicht darauf an, jede Methode aus einer möglichst interessanten technischen Aufgabe zu entwickeln. Das hat gewiß psychologische Bedeutung zur Belebung des Interesses, ist aber nicht das, was ich meine. Das Wesentliche ist, daß der Schüler gegenständlich denken lernt. Es ist sogar gefährlich, von Aufgaben auszugehen, die zuviel Sachkenntnis aus physikalischen oder technischen Bereichen fordern. Ich habe deshalb elektrotechnische Aufgaben ganz vermieden, und Aufgaben aus Mechanik erst im VI Kapitel abgehandelt, vorher aber mich auf geometrische und Bewegungsaufgaben beschränkt. Man wird also überhaupt eine Methode zunächst am einfachsten Beispiel entwickeln, und sie später auf verwickeltere Sachverhalte ,,anwenden“. Das muß eben organisiert werden. So kommt ein Lehrgang zustande aus lose aneinandergereihten Aufgaben. Mancher vermißt dabei die Systematik. Wer aber selbst schon neue Aufgaben gelöst hat, der weiß, daß das produktive Denken nicht nach dem aristotelischen Schema von Induktion und Deduktion sich vollzieht, sondern nach Analogie und Erfahrung aus früher gelösten Aufgaben. Es werden aber meist verwandte Aufgaben sein, die zur Klärung einer Gruppe mathematischer Methoden dienen. Das kommt zum Ausdruck in der doppelten Überschrift meiner 10 Kapitel, wo die praktische Fragestellung und das zu erarbeitende mathematische Gebiet einander gegenüberstehen.

9. Historisch ist es so gewesen: Die mathematischen Gebiete sind entstanden aus praktischen Fragestellungen. So gehe auch ich zwar nicht den historischen Weg, wie er gewesen ist, aber einen quasihistorischen Weg, wie er hätte gewesen sein können, wenn die Anlässe andere gewesen wären. Die historische Entwicklung hat den Menschen nicht immer zuerst vor die einfachste Aufgabe gestellt. Newton ging aus von der Planetenbewegung. Hier muß man eben Ersatz finden und Vorsehung spielen. Nach dem biogenetischen Grundgesetz wiederholt die Entwicklung des Individuums die Entwicklung der Art, aber nicht genau, palingenetisch, sondern in abgekürzter Weise, cenogenetisch.

10. Von dem Unterricht an den Hochschulen unterscheide ich mich noch in folgendem: Dort wird die Lösung einer Aufgabe meist systematisch nach den Grundgleichungen angesetzt, und dann wird mathematisch umgeformt. Zugegeben, daß die analytische Methode weiter führt, als die synthetische. Dafür dringt diese tiefer in das Verständnis ein. Das wird oft übersehen. Wer auf den Höhen der Wissenschaft neue Erkenntnisse erarbeitet, dem sind die Grundlagen nur zu selbstverständlich. — Man bedenke aber, daß die analytischen Grundgleichungen synthetisch entwickelt sind: die Gleichung der Geraden aus der Proportion, die des Kreises aus dem Pythagoras. Da ist es doch zweckmäßig, zuweilen auf Proportion und Pythagoras zurückzugehen, und so den Zusammenhang mit der ursprünglichen Anschauung zurückzugewinnen. — Der produktive Mensch denkt überhaupt nicht systematisch, sondern teils anschaulich, teils formal. Aus Anschauung setzen wir für die Schwingung eine Sinusfunktion an. Wegen der Kreisfrequenz verläßt man sich auf die Differentialquotienten. Die Formel führt weiter als die Anschauung, aber man verliert dabei die Übersicht. Man muß eben Beides machen. Es ist wie mit dem Blinden und dem Lahmen in einer Fabel von Geliert. Die Anschauung ist lahm, die Formel ist blind. Aber

> der Lahme hängt mit seinen Krücken
> sich auf des Blinden breiten Rücken.
> Vereint wirkt also dieses Paar,
> was einzeln keinem möglich war.

11. Die höheren Schulen richten sich weitgehend nach der Universität aus, der die Studienräte ja entstammen. Sie wollen den Schüler zu „wissenschaftlichem Denken“ erziehen. Aber die Schule darf deswegen keine verkleinerte Hochschule sein, sondern ihre Ergänzung, ihr Fundament. Und das kann sie doch nur sein, wenn sie die Begriffe und Verfahren, mit denen die Hochschule arbeitet, aus ihrem eigentlichen Ursprung entwickelt. Die Arbeit des produktiven, nicht die des kritischen Menschen zu begreifen, auch das ist wissenschaftliches Denken. — Was soll denn der künftige Arzt, Jurist oder Kaufmann von der Mathematik haben? Doch nicht die Technik des Logarithmenrechnens oder die des Differenzierens; sondern die Einsicht in Sinn und Bedeutung solcher Künste. Nur bei lebensnahem Unterricht wird sein Horizont geweitet zum Anschauen menschlicher Tätigkeit auf allen Gebieten. Was hat wohl Felix Klein, der Förderer der angewandten Mathematik, gemeint, als er die Differentialrechnung auf die Schule brachte?

12. Meine Methode ist verwandt mit dem, was die allgemeine Schule als Arbeitsschule erstrebt: Der Schüler soll nicht lernen, sondern denken lernen. Er soll des produktiven Geistes einen Hauch verspüren. Dazu ist nötig, vom Problem auszugehen. — Andererseits ist zu bedenken, daß vieles einfach gelernt werden muß. Und dann darf man nicht erwarten, daß der Schüler nun die Lösungen von selbst findet, zu denen die Menschheit Jahrhunderte gebraucht hat. Man muß ihn dahin leiten. Die Arbeitsschule ist nur möglich unter straffer Führung. Der Schüler muß in jedem Augenblick das denken, was der Lehrer will, daß er denken soll. Der Lehrer muß eben seinen Aufbau von sich aus dem Geist des Schülers anpassen. Dann mag es wohl glücken, daß er den Schüler das entscheidende Wort selbst aus-sprechen läßt, als habe dieser es selbst gefunden. Anders verliert man nur Zeit. Der Unterricht muß fortschreiten langsam und bedächtig, aber stetig und unaufhaltsam. —- In dem Gegensatz der Ideale, der Volksschullehrer und der Studienräte weise ich einen dritten Weg.

13. Beim Begriff des Differentialquotienten ist die größte Sorge der Mathematiker, der Hörer könne den Grenzübergang als Vernachlässigung auffassen. So tun sie sich schwer mit dem Begriff „limes“ und möchten am liebsten das Differential ganz verbieten. Das geschieht aber nur im Anfang des Unterrichts. Nachher kommt der limes nie wieder vor, und der Streifen $y\,dx$ ist unangefochten das Differential der Fläche und $\pi y^2 dx$ das des Volu-

mens. Man lasse bei der Erklärung des Grenzfalles das Kurzzeichen „lim“ weg. Stenographie ist kurz zu schreiben, aber schwer zu lesen, und verliert ihren Sinn, wenn sie erst lang erklärt werden muß. Wenn man es nur mit Potenzen und Sinus, Exponentialfunktionen und Logarithmen zu tun hat, so braucht man sich um die Differenzierbarkeit keine Sorgen zu machen. Ich begründe die Fortlassung der „Glieder höherer Ordnung“ ausreichend damit, daß sie beim Übergang zur Tangente doch fortfallen. Was für die Sehne nur eine Näherung ist, eben das ist für die Tangente gerade richtig. So darf man getrost das Wort Näherung aussprechen.

14. Um so mehr Wert lege ich auf die gegenständliche Erfassung des Differentialquotienten als einer Wachstumsgeschwindigkeit und auf das anschauliche Arbeiten mit den Differentialen. Wenn der Sinus geometrisch definiert ist, aus dem rechtwinkligen Dreieck, dann soll man auch seinen Differentialquotienten geometrisch ableiten, nicht aus einem zufällig bestehenden Additionstheorem heraus. Auch die anschaulich definierte Krümmung leite ich geometrisch ab. Und wenn man meint, daß solche anschaulichen Ableitungen zu Fehlern führen könnten, so ist es eben Aufgabe der Darstellung, das richtige Gefühl dafür zu entwickeln, was man fortlassen darf, was man mitnehmen muß. Was hätten wohl Gauß und Euler ohne mathematisches Gefühl, nur mit der Logik erreicht?

Doch hat Genie und Herz vollbracht,
was Lock’ und Descartes nie gedacht,
sogleich wird auch von diesen
die Möglichkeit bewiesen.

15. Der Funktionsbegriff spielt eine große Rolle in der üblichen Darstellung. Sachlich mit Recht. Aber aus jeder Aufgabe wird hinlänglich klar, daß stets gefragt ist nach dem Verlauf von Größen, die von ändern abhängig sind. Nur bei abstrakter Darstellung muß das ersatzweise begrifflich betont werden. Die Schreibweise $y = f(x)$ ist jedenfalls überflüssig. f ist ja y, und $f\,'$ ist $y\,'$. Es besteht kein Bedürfnis, für die Größe und für den Funktionsausdruck verschiedene Buchstaben einzuführen, y = f(x) zu schreiben ist nur eine Manier, jede Aussage (y sei abhängig von x) in die Form einer Gleichung zu pressen. Allenfalls sage man $y = y(x)$. — Das Funktionszeichen hat erst dann Sinn, wenn zB gesagt werden soll, daß eine Funktion von zwei Größen, x und t, Funktion nur von der Verbindung $x\text{-}ct$ sein soll:

Also $y(x;,t)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)$

Da sind f_1 und f_2 ja wirklich andere Größen, Anteile des Anfangszustands, zu berechnen aus Anfangswert und Anfangsgeschwindigkeit.

16. Die Darstellung habe ich möglichst kurz gefaßt, und in kurze Absätze unterteilt, um auf wenig Raum möglichst viele Anregungen zu bieten, und um das Bild der Ableitung übersichtlich zu halten. Jeder Gedanke muß ausgesprochen werden. Zwischenrechnungen aber, zumal wenn sie an anderer Stelle schon mal vorkamen, habe ich fortgelassen. Der Leser muß ja doch beim Durcharbeiten des Buches ein Blatt danebenlegen, die Skizzen nachzeichnen und die Rechnungen mitschreiben, die algebraischen und die Zahlenrechnungen. Ein mathematisches Buch ist kein Roman, den man auf dem Sofa liegend lesen könnte. Nur wer die Skizze entstehen sieht, begreift sie ganz. Nur wer die Umformung selbst vollzieht, merkt, was sich forthebt und warum. Nur wer selbst die Zahlen in die Formel einsetzt und ausrechnet, erfaßt den Inhalt solcher Rechenvorschrift. Ich habe mir überlegt, ob ich Schlußformeln unterstreichen soll. Aber ich will ja nicht Formeln bereitstellen, sondern das Ableiten von Formeln aus Vorstellungen zeigen. Der Leser soll eben selbst das Buch durcharbeiten, und sich das Wichtige hervorheben. Auch das ist Arbeitsschule.

17. Meine Darstellungsart ist angeregt durch das Bedürfnis nach Verständnis schon während meines Studiums. Sie nahm Gestalt an während meines langjährigen Unterrichts an der Ingenieurschule Hamburg, wo ich seit 1912 hauptsächlich Mechanik und Wärmelehre, oft aber auch Mathematik unterrichtete. Nach dem Kriege 1918 habe ich dann lange Jahre Material gesammelt, gesichtet und aufgebaut. Seit 1931 habe ich dann meine Bücher über Mechanik und Wärmelehre herausgebracht, auch jedes noch einmal neu bearbeitet. Jetzt gehe ich mm zur Mathematik über, die ich schon während des zweiten Krieges entworfen und nun nochmals überarbeitet habe. Es ließ sich nicht vermeiden, daß Einiges zB die Schwingungen nun doppelt dargestellt ist. Man kann eben die mathematische Physik von beiden Seiten betrachten, in verschiedener Weise: in Dynamik mehr mit Anwendungen auf technisch wichtige Fälle, in Mathematik unter Erläuterung der mathematischen Methoden und Vergleich mit anderen Anwendungsgebieten. — Meinen Kollegen an der Ingenieurschule, den Herren Dr. Leiss, Dr. Schwindt, Dr. Sommer danke ich für manche Anregung und Kritik bei der Entstehung dieses Buches.

18. Meine Darstellung ist nicht zugeschnitten auf eine bestimmte Schulgattung, erst recht nicht auf einen bestimmten Lehrplan. Ich setze mich bewußt zwischen sämtliche vorhandenen Stühle, hoffe aber, daß Alle noch zu mir heranrücken werden. Sonst hätte es ja auch keinen Sinn, den vielen schon vorhandenen Darstellungen noch eine neue hinzuzufügen, wenn sie nicht neu wäre. Über das Pensum der höheren Schule gehe ich weit hinaus. Auch die Bau- und Ingenieurschulen werden nicht Alles verarbeiten können. Das schadet nichts. Jeder kann das entnehmen, was er braucht, namentlich die Darstellung der Grund Vorstellungen. Höhere Kapitel kann er später im Beruf zu Rate ziehen. Auch dem Hochschulstudenten wird es als andersartige, nichtkritische aber anschauliche Darstellung von Nutzen sein. Für höhere wissenschaftliche Fragen wird er sowieso, wie auch jetzt, zu Spezialwerken greifen müssen. So hoffe ich, jedem zu dienen, der zu gegenständlichem Verständnis strebt.

Hamburg, am 5 Oktober 1953 H. Blasius