SONDERDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT »ENERGIE UND TECHNIK«

6. JAHRGANG · DEZEMBER-HEFT 1954

# Gedanken zum Mathematikunterricht ein Wort an meine Kritiker

Von H. Blasius, Hamburg

Meine Bücher über Mechanik und Wärmelehre und nun zuletzt die höhere Mathematik schrieb ich aus dem Gedanken heraus, daß man den Sinn der Begriffe nicht aus ihrer formalen Definition erfasse, sondern aus ihrer gegenständlichen Bedeutung im Beispiel, und daß man auch bei der Darstellung der Methoden vom Beispiel ausgehen müsse, wo das Ziel ersichtlich ist und wo schon die Anschauung des Gegenstandes Anregung zur Lösung gibt; wie ja auch historisch die Wissenschaft aus dem Problem erwachsen ist. Das ist der natürliche Weg: Bedürfnis, Fragestellung, Forschung, Ansatz, Umformung, Auswertung. Diese Gedanken habe ich in meinen Vorworten ausführlich entwickelt, zuletzt in einem Aufsatz über Ingenieurunterricht in „Energie und Technik", April 54, Jahrgang 5. Der Schwierigkeiten dieses Weges war ich mir durchaus bewußt (Vorwort 5): „Er fordert hohe Konzentration vom Schüler und noch mehr vom Lehrer", aber er zeigt den wahren Kulturzusammenhang der Mathematik. Ob es mir gelungen ist, diesen Gedanken angemessen durchzuführen, darüber bin ich nicht Richter. Aber der Forderung sollte man sich nicht verschließen.

2. Um diese Darstellungsart bekanntzumachen, hat mein Verleger im Dezember 1953 reichlich Freistücke der höheren Mathematik verschickt: 33 an Schulbehörden, 9 an pädagogische Institute, 30 + 45 an Institute der Universitäten und der technischen Hochschulen, 23 an Ingenieurschulen mit der Bitte um Umlauf bei den Interessenten, um Aufnahme in die Bücherei und um gefl. Stellungnahme. Auf diese 140 Sendungen erhielten wir bisher 51 Antworten, wovon 19 nur den Empfang mit Dank bestätigten. Einige davon stellten spätere Stellungnahme in Aussicht. Außerdem wurden natürlich Besprechungsstücke an Zeitschriften versandt. Ich danke allen, die sich die Mühe gemacht haben, näher auf die Sache einzugehen, ob zustimmend oder kritisch.

3. Drei Schulbehörden sagen übereinstimmend, daß das Buch eine Fundgrube von Beispielen für den Lehrer sei, aber als Schulbuch nicht eingeführt werden könne. Das war auch nicht meine Absicht. Da hätte ich mich nach den Lehrplänen richten müssen (Vorwort 18). Mein Buch ist ein Kampfbuch, mit dem ich die Lehrpläne und die Lehrweise beeinflussen will: Mathematik wird doch an der Oberschule oft recht abstrakt unterrichtet, dem Vorgang der Universität folgend. Man sollte doch aber den künftigen Juristen, Medizinern, Kaufleuten eher den Kulturzusammenhang der exakten Wissenschaften vermitteln als eine Fertigkeit im Logarithmenrechnen und im Differenzieren. „Eingekleidete Aufgaben" sind freilich nicht beliebt an den Schulen. Aber sie sind das, was Bildungswert hat. Formale Übungen sind oft nur Ersatz für Verständnis. Vielleicht scheiterten Goethe und Schopenhauer gerade hieran. Und die grundlegenden Beispiele sind so einfach, daß sie auch für nicht technisch interessierte Schüler leicht verständlich sind.

4. Wenn man aber in der Mathematik vorzugsweise eine Gelegenheit zur Denkschulung sieht, so bedenke man, daß bei der Durcharbeitung eines Beispiels viel mehr Denkprozesse vorkommen, und zwar einfacherer Art, als bei kniffIichen Überlegungen über Zahlbegriff, Parallelenaxiom, Differenzierbarkeit. Ist denn Mathematik ein geistreiches Gedankenspiel für müßige Stunden oder ein achtbares Handwerk im Rahmen der Gemeinschaftsarbeit? Hierauf wollte ich die Aufmerksamkeit der Lehrer und der verantwortlichen Räte lenken. Auch könnte man das Buch schon jetzt begabten und weiterstrebenden Schülern in die Hand geben.

5. Von den pädagogischen Instituten erhielten wir 2 Dankschreiben, keine Stellungnahme. Ich wollte den Herren eine neue Auffassung und ein schönes Anwendungsgebiet des Arbeitsschulgedankens zeigen, der ja nicht nur für die Grundschule gilt, sondern bis zur Universität einschließlich durchdacht werden sollte. Ich könnte mich auf Ihren Pestalozzi berufen, bei dem ich verwandte Gedanken gefunden habe: In der „Abendstunde" Absatz 15—24 stellt er die „Bahn der Natur", die „Wahrheiten aus Realgegenständen" gegenüber dem „tausendfachen Gewirre der Wortlehren und Meinungen", der „Modelehrart". Aber hat er nun selbst seine Gedanken durchgeführt? Gegen Gessner (1801) klagt er über sich selbst, er wolle „eine psychologische Unterrichtsmethode entwickeln", aber er sei nicht imstande, sie „in ihrer ganzen Einfachheit aufzustellen", er verfalle „mit jedem Tage mehr in Gemeinsprüche".

6. Auch Fichte in seinen Reden an die deutsche Nation will eine „neue Erziehung" aufstellen, die von der Sache ausgeht; er will das objektive Denken schulen. Aber die Durchführung bleibt er uns schuldig. Und Schopenhauer (Parerga II, Kap. 28, Über Erziehung) sagt, daß die Anschauung dem Begriff vorhergehen müsse und der engere Begriff dem weiteren. Bei der künstlichen Erziehung aber werde der Kopf voll Begriffe gepfropft, bevor noch eine ausgebreitete Bekanntschaft mit der Welt da sei. Theoretisch also ist das alles längst erkannt. — Man muß aber doch in der Pädagogik über die Gemeinsprüche hinauskommen und sie in die Tat umsetzen. Hic Rhodus, hic salta! Einen solchen Versuch biete ich seit nunmehr 23 Jahren nicht nur für die Ingenieurschulen, sondern auch für die allgemeinen und die Hochschulen. Aber die Pädagogik des Fachunterrichtes entwickelt sich unbeachtet und unabhängig von der pädagogischen Wissenschaft.

7. Nun möchte ich mich mit meinen *Fachgenossen* auseinandersetzen an den Ingenieurschulen, Hochschulen, Universitäten. — Ausnahmslos wird anerkannt, daß ich eine Fülle *guter Beispiele* biete. Aber ich wollte gewiß keine Aufgabensammlung schreiben, kein Buch über „Anwendungen der Mathematik". Ich würde es als Mißbrauch betrachten, wenn man meine Bücher nur auf Beispiele plündern würde, statt sich den *Lehrgang* zu eigen zu machen. Aber tun Sie's nur! Sie werden dann bald mit den Beispielen auch den Lehrgang übernehmen. Zum abstrakten Unterricht kommt es ja nur aus Mangel an zureichenden Beispielen. Volle Zustimmung finde ich nur bei wenigen.

8. Mehrere Zuschriften sind *grundsätzlich einverstanden* mit dem Ausgehen vom Beispiel, geben mir sogar das Zeugnis, daß ich es gut durchgeführt habe. Sie wenden aber ein, daß diese Unterrichtsart *zu viel Zeit* koste. Zugegeben, daß das Ausgehen vom Beispiel zusätzlich einige *Erklärungen zur Sache*, also mehr Zeit fordert. Aber man *gibt* dem Hörer ja auch mehr damit, und zwar gerade das, was er braucht, wenn er überhaupt mit der Mathematik etwas anfangen will. Und dieselben Erklärungen muß man ja auch geben, wenn man die Beispiele *hinter* die Theorie schalten will; falls man sich nicht nur mit formalen Übungen begnügen will. Natürlich fordert es weniger Zeit, 20 formale Differentialquotienten bilden zu lassen als 3 „eingekleidete Aufgaben" gründlich durchzusprechen. Aber was hat er von den Differentialquotienten? Mit Aufgaben aber gibt man dem Hörer doch von vornherein eine *tiefere Einsicht* in die Quellen der Wissenschaft, in ihren *Sinn*, und kann ihn dann später mit weniger Zeitaufwand weiterführen. Die Investition macht sich bezahlt. — Und wenn wirklich ein paar Spezialitäten darum fallen — was zum Verständnis notwendig ist, muß geschehen. In Spezialitäten braucht man ja nicht vollständig zu sein.

9. Schärfere Kritik übt schon eine Zuschrift, die das Ausgehen vom Beispiel eine *unnötige Erschwerung* nennt. Demgegenüber kann ich nur auf meiner These beharren, daß die Begriffe nicht nach Platon aus einer Ideenwelt stammen, sondern aus ihrer gegenständlichen Bedeutung in den Anwendungen. Das Ausgehen vom Beispiel *erleichtert* das Verstehen. Mehrfach bestätigt man mir, daß die Zielsetzung der Mathematik bei abstrakter Darstellung oft unverständlich sei. Mancher Ingenieur habe so eine Abneigung gegen die Mathematik bekommen und erst *in der Praxis ihre Bedeutung erkannt*, also gerade auf dem Wege, den ich schon für die Darstellung empfehle. — Der Differentialquotient ist seinem Wesen nach eine Geschwindigkeit, eine Beschleunigung, eine *Wachstumsgeschwindigkeit* im weiteren Sinne usw. Erst beim Versuch, das zu berechnen, erweist er sich als Grenzwert. Die Integrale sind *Summen*, wie sie zahlreich vorkommen. Auch der reinste Mathematiker geht aus von der Tangente bzw. von der Fläche. In dieser Beziehung biete ich nur eine größere *Mannigfaltigkeit*. Und die „Anwendungen" sind den Herren doch an sich erwünscht. Sie sollten sie nur mit etwas mehr Liebe behandeln, und nicht so schnell drüber weggehen.

10. Vollends die Fragestellung der Differentialgleichungen: gesucht eine Funktion, deren II Differentialquotient der und der Gleichung genügt, ist doch nur aus den *Problemen* der Schwingungen, der Strömungs-, der Spannungsfelder, der Potentiale verständlich; erst recht die Grenzbedingungen. Sonst wäre es doch nur eine Denksportaufgabe, für die sich kein Mensch interessiert hätte. Euler, Bernoulli und andere haben sich doch an dem Problem der Biegungs- und Knicklinien, der Brachistochrone u. a. gebildet. Man soll deshalb auch nicht sagen, daß diese Darstellungsart wohl für Physiker und Naturwissenschaftler angemessen sei, nicht aber für Mathematiker. Auch der Mathematiker soll nicht auf einer *Insel* wohnen, sondern sich des Zusammenhangs seiner Tätigkeit mit dem Ganzen bewußt sein. Mein Buch ist nicht „Anwendungen der Mathematik", sondern Zurückführung derselben auf ihre natürliche Quelle.

11. In einer andern Zuschrift wird befürchtet, daß die physikalischen und technischen Vorstellungen die mathematischen Gedanken *erdrücken*. Diese Gefahr habe ich auch gesehen (Vorwort 8), und habe mich deswegen zuerst ausdrücklich auf *einfache physikalische, geometrische und Bewegungsaufgaben* beschränkt. Ich glaube nicht, daß der Leser mit den Aufgaben über Wurfparabel, Schiffswiderstand, Kurbelgetriebe, Abwicklungen, Rollkurven, Aräometer, Ausdehnungsarbeit, Abkühlung, Seilreibung in dieser Beziehung überfordert wird. Im Gegensatz zu diesen Befürchtungen sagt eine andere Zuschrift: es sei erstaunlich, wieviel man aus diesem Büchlein an Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Reihenlehre, komplexen Zahlen lernen könne. Ein anderer sagt, die Bedenken, die man gegen die *Durchführbarkeit* meiner Darstellungsart haben könnte, hätte ich beseitigt. Man zeige mir aber noch einfachere, aber nicht formale Beispiele. Dann will ich die meinigen gern ersetzen.

12. Überhaupt soll der Lehrer, der mir folgen will, andere, verwandte Aufgaben nehmen. Nur darf er sie *nicht komplizieren*, weil sie dann vielleicht interessanter werden. Dafür würde ich keine Verantwortung übernehmen. Maßgebend ist nicht das Interesse, sondern der Bildungswert. Man muß sich in die Psyche des Hörers versenken. — Andererseits darf das Beispiel auch *nicht trivial* sein: Differentialrechnung führe ich ein am Kurbelgetriebe (Nr. 31), Integralrechnung an einer *ungleichmäßigen* Beschleunigung (Nr. 61). Eine höhere Methode muß erklärt werden an einem Beispiel, bei dem man sie wirklich *braucht*, bei dem die elementare Methode versagt. Ohne Not wäre sie ja auch kaum entstanden. — Die Formel $b\,t^2/2$ oder den Dreiecksinhalt mit Integralrechnung abzuleiten, heißt mit Kanonen nach Spatzen schießen. $bt^2/2$ benutze ich deshalb in Nr. 1 nur, um die Parabel vorzustellen. — Mechanik benutze ich erst von Kapitel VI an. Bis dahin muß sie im Parallelunterricht entwickelt sein. Daß man Differentialgleichungen nicht ohne Mechanik vortragen kann, wird jeder zugeben. Aber auch hier habe ich bewußt auf Elektrotechnik verzichtet, im Gegensatz zu manchen andern Büchern, denen man den Vorwurf der Belastung mit mathematik-fremdem Stoff nicht zu machen pflegt.

13. Man vermißt bei meinen Ableitungen die übliche *Strenge*, die Ausführungen über Stetigkeit und Limes (Vorwort 13). Zweifellos gibt es Fälle, wo diese Überlegungen zum Tragen kommen, aber nicht bei Potenzen, Sinus, Exponentialfunktion, Logarithmus. Stößt man später auf *Singularitäten*, so ist Zeit genug, sie alsdann zu untersuchen (Nr. 77; 197). Dem Anfänger vorsorglich von entfernten Möglichkeiten zu sprechen ist, als wenn man jemand, der zu einem Ausflug in die Heide aufbricht, vor den Gefahren der Gletscherspalten am Matterhorn warnen wollte. — Man *braucht* ja nicht gleich von der beliebigen Funktion zu sprechen. — Das merkt man nachher schon von selbst, wenn man beim numerischen Differenzieren oder Integrieren sich einer Singularität nähert. Da nützt keine Verkleinerung der „Differentiale", aber auch keine Theorie vom Limes, sondern nur eine passende Umformung.

14. Andere vermissen die *Systematik* der Mathematik. — Ist Mathematik eine systematische Wissenschaft oder eine *Sammlung von Kunstgriffen*? — Das zeigt sich sehr deutlich bei den Integra-

tionsmethoden, überhaupt bei allen Umkehraufgaben: Schon das schriftliche Dividieren ist doch nur ein geschicktes Probieren, mehr noch das Wurzelziehen. Und wenn die analytische Geometrie die Berechnung der Geraden, der Potenzen, der Kegelschnitte mit Not in ein System gebracht hat, so sind die Grundlagen der Formeln doch synthetischen Ursprungs: Strahlensatz, Pythagoras. Auch durch die Ableitung der Ellipsengleichung aus der Fadenkonstruktion (Nr. 132) wird man doch mehr überführt als überzeugt, um ein Wort Schopenhauers zu gebrauchen. Ebenso sind die Dandelinschen Kugeln (Nr. 140) ein Kunstgriff, ein „Mausefallenbeweis". Die Bogenlänge der Ellipse erweist sich beim Versuch, sie zu berechnen, als elliptisches Integral. Daher spricht man nicht davon.

15. Schon bei den Rollkurven (Nr. 51) müssen wir die Parameterdarstellung zu Hilfe nehmen. Und die Abwicklung des Dampfdoms (Nr. 146) — die läßt der Systematiker wohl besser aus. Sie ist aber sehr lehrreich. — Wer sich nicht nur mit den üblichen Standardaufgaben beschäftigt hat, sondern oft neuen Aufgaben gegenüberstand, der weiß, daß jede neue Aufgabe den Rahmen einer vermeintlichen Systematik sprengt. Man kann dann nicht nach festen Methoden arbeiten, sondern muß sich auf Analogie, Erfahrung und Gefühl verlassen. Das schließt nicht aus, daß man nach individuell behandelten Aufgaben durch Verallgemeinerung und Zusammenfassung die mathematischen Erkenntnisse abzurunden sucht und so zu einem Teil zum System gelangt. Das geschieht aber immer erst nachträglich. Wir müssen loskommen von der unglückseligen Idee des a priori.

16. Ich möchte die Gegenfrage stellen, ob der Student in einem formalen Lehrbuch gleich das System herauserkennt, ob er da nicht auch zunächst nur ein Gewirr von Formeln sieht, durch das er sich Schritt für Schritt hindurcharbeiten muß. Erst auf dem Gipfel des Berges genießt man die Aussicht. Der akademische Lehrer, der von oben den Weg übersieht, wundert sich, daß der Student beim Anstieg Schwierigkeiten findet, und vermißt nun bei mir seine gewohnte Systematik. — Mir jedenfalls ist das formale Studium sehr schwer gefallen. Ich ging heran mit dem Gedanken, das System zu suchen. Ich geriet so an die Galois'sche Theorie, und kam erst ins Gleichgewicht, als ich merkte, daß jede Frage einzeln mit den ihr angepaßten Methoden behandelt werden muß, daß also gar kein allgemeines System besteht. So kam ich zu meinen Büchern.

17. Ein anderer sagt, meine Bücher wirkten unruhig: In der losen Aufeinanderfolge der Beispiele verliere man die Übersicht. Diese Unruhe liegt in der Natur der Sache, in der Vielgestaltigkeit der Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik. Natürlich ist ein Gerippe übersichtlicher als ein Lebewesen von Fleisch und Blut. Aber das Gerippe kann nur verstanden werden aus dem, was es tragen soll. Unruhe ist Lebendigkeit. — Ich habe mich aber bemüht, bei aller Mannigfaltigkeit der Beispiele, die man ja lobt, die Übersicht zu wahren: Jedes Beispiel ist unterteilt in kurze numerierte Abschnitte, dem Fortschritt des Gedankenganges entsprechend. Die induktiv entwickelten Begriffe sind alsbald ausdrücklich zusammengefaßt: Nr. 11 Gerade, 13 Parabel, 20 Potenz, 36 Potenzdifferentialquotient, 83 Exponentialfunktion; später Nr. 216 Differentialgleichungen, 245 Partialbrüche, 249 partielle Integration. Dazu die Zusammenfassungen am Ende jedes Kapitels. Es ist auch nicht so, wie ein anderer befürchtet, daß verwandte mathematische Probleme durch die Ordnung nach den anfallenden Aufgaben auseinandergerissen würden. Die Kapitelüberschriften zeigen, daß jedesmal ein bestimmtes mathematisches Gebiet in geschlossener Weise abgehandelt wird. Während historisch die Wissenschaft sich aus zufälligen Anlässen entwickelte, kann man in der „quasihistorischen" Darstellung Vorsehung spielen.

18. Jeder Lernende ist ungeduldig: Gibt man ihm eine abstrakte Darstellung, so begreift er nicht und verlangt Beispiele. Verweilt man beim Beispiel, so fordert er gleich die Übersicht übers Ganze. Das ist unabhängig davon, wie man Theorie und Beispiele schaltet. Das liegt in der Natur der Sache. Ein Mathematikbuch ist kein Roman. Aber Abstraktion ist schon dem Begriff nach das Zweite. — Auch ich beanspruche die Geduld des Lesers. Aber bei mir führt jedes Beispiel zunächst zu einem gewissen Abschluß: das Problem ist gelöst, der Spannungsbogen (Fragestellung, Forschung, Auswertung) geschlossen. Die abstrakt vorgetragene Methode aber ist ein herausgerissener Teil eines solchen Ganzen (Vorwort 6). Auch das formale Beispiel schwebt in der Luft: da steht nun der mühsam gebildete Differentialquotient, und wartet auf die Bestätigung durch den Lehrer, nicht aus der Sache.

19. Nun wendet mir ein anderer ein, daß man bei der Entwicklung im Beispiel die allgemeine Tragweite der Methode nicht erkenne. — Aber das übersieht der Student auch sonst nicht. Ist auch nicht nötig. Diese Einsicht kommt bei den weiteren Aufgaben noch früh genug, ist auch nur auf diesem induktiven Wege möglich. Jedes weitere Beispiel bringt eine vertiefte Einsicht. Das ist der natürliche Weg. Das Unterrichten ist kein fachliches Problem, sondern ein psychologisches. — Die Tragweite eines Paragraphen des BGB lernt man auch erst aus vielen Beispielen: Will man jemandem klarmachen, was ein Wechsel ist, so gibt man ihm doch am besten ein Beispiel, auch wenn es nicht gleich alle Möglichkeiten zeigt. — Aber der Mathematiker hat den Ehrgeiz, sich so allgemein wie möglich auszudrücken. So wird Mathematik oft schwer verständlich, während beispielhafte Ausdrucksweise leichter eingeht und leicht auf andere Fälle zu übertragen ist.

20. Ich vermisse bei meinen Kritikern noch das Urteil über die anschaulichen Ableitungen: Nr. 45 Sinusdifferentialquotient, 53 Krümmung, 110 Änderung von Dreiecksstücken, über Nr. 77 Einführung der Exponentialfunktion, 271 der komplexen Zahlen, 276 der Eulerschen Gleichungen, 281 der Potenzreihen. An diesen Stellen zeigt sich gerade das Wesentliche meiner Methode, indem ich versuche, die Notwendigkeit solcher Entwicklungen herauszuarbeiten, sie aus ihrem Zweck heraus zu entwickeln. Vor aller Theorie steht eben das Problem. Diese Durchführung im einzelnen ist gerade das, was ich biete. Ich spreche ja nicht nur Allgemeinheiten aus, und sehe deshalb auch in nur allgemeinen Bemerkungen keine Widerlegung. Die Durchführung muß es zeigen. Dazu lade ich meine Fachgenossen ein.