

Zur Konstruktion von Streuzuständen
mit Hilfe lokaler Observabler

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereiches Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
ULRICH STEIN
aus Wasserlos

Hamburg
1989

Gutachter der Dissertation :

Prof. Dr. DETLEV BUCHHOLZ
Prof. Dr. RUDOLF HAAG

Gutachter der Disputation :

Prof. Dr. DETLEV BUCHHOLZ
Prof. Dr. JOCHEN BARTELS

Datum der Disputation :

7. 11. 1989

Sprecher des
Fachbereiches Physik und
Vorsitzender des
Promotionsausschusses :

Prof. Dr. HEINRICH J. WENDKER

für meinen Vater,
der mich geduldig während der meisten Zeit der Arbeit finanzierte,

und für Julia,
die mich regelmäßig fragte, wann ich fertig sei.

Abstract

We propose an algorithm for analysing the particle content of any given quantum field theoretical model, and for constructing any possible scattering state, starting from an arbitrary state in the vacuum sector. We only need local observables, and make no use of charge-carrying fields like in the LSZ - algorithm. We prove the algorithm for massive theories with localizable charges. But also for other theories, like those with mass - zero - particles, one expects that the algorithm will work.

Es wird ein Verfahren vorgeschlagen, das die Möglichkeit eröffnet, für beliebige quantenfeldtheoretische Modelle ausgehend von einem Zufallszustand im Vakuum - Sektor den Teilcheninhalt zu bestimmen und beliebige Streuzustände zu konstruieren. Dabei werden nur lokale Observable verwandt und keine ladungstragenden Felder, wie etwa beim LSZ - Verfahren. Für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen wird die Anwendbarkeit des Verfahrens bewiesen. Aber auch für andere Theorien, z.B. solche die Masse - Null - Teilchen enthalten, erwartet man, daß das Verfahren funktioniert.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	7
A : Grundlagen	
a) Allgemeine Strukturen und Definitionen	11
b) Existenz der Limiten von $C(t;h)$	14
B : Konstruktion des Streuzustandes	
a) Analyse des Ein-Teilchen-Inhaltes der Theorie	16
b) Diagonalisierung der Formfaktoren	17
c) Test des Teilcheninhaltes des Zufallszustandes ω	18
d) Separation der kompensierenden Ladungen und Konstruktion des Streuzustandes	20
C : Beweisteil	
a) Diagonalisierung der Formfaktoren	
α) Konstruktion einer Orthonormalbasis	24
β) Konstruktion der Zähler C	30
b) Rein massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen	
α) Ladungstragende Felder, Basis in den $\mathcal{H}(\mathfrak{p})$	40
β) Araki-Haag-Limiten	42
γ) Separation der kompensierenden Ladungen	45
δ) Festlegung der Teilchenzahl	49

D : Beispiel	53
E : Schlußbemerkungen	60
Liste der Abkürzungen	63
Literaturverzeichnis	64
Dank	68

Einleitung

Im Jahre 1967 veröffentlichten H. Araki und R. Haag [AH 67] eine Methode zur Analyse der Teilcheneigenschaften einer massiven Quantenfeldtheorie allein mit Hilfe observabler Größen – sogenannter Teilchen-Zähler, deren Produkte Koinzidenzmessungen experimenteller Detektoren repräsentieren. Sie erweiterten damit das normalerweise in der Feldtheorie benutzte Konstruktionsverfahren von H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann [LSZ 55, 57], bzw. die Streutheorie von R. Haag [Ha 58] und D. Ruelle [Ru 62], für die ladungstragende, eichabhängige, nichtobservable Operatoren benötigt werden.

Im Schlußwort der Arbeit schrieben Araki und Haag sinngemäß :

" While the algorithm is useful in analyzing a given state in terms of its outgoing (or incoming) particle configuration, it does not provide a convenient method for constructing a state with a specified initial particle configuration. On the other hand it is clear that by a similar algorithm one can determine the initial particle configuration. But the procedure is inelegant and tedious the use of 'non-observable' fields is certainly preferable ... "

Araki und Haag haben die hier angedeutete Prozedur nicht wirklich durchgeführt. Auch wenn in der Arbeit steht, daß es klar sei, daß man damit einlaufende Teilchen-Konfigurationen präparieren kann, so geben sie jedoch keine genaueren Hinweise, wie man vorgehen könnte. Insbesondere bleibt das Problem der ladungstragenden Zustände unberücksichtigt. Statt dessen verweisen sie für Anwendungen auf das LSZ-Verfahren.

Es sind aber vor allem Situationen bekannt, wo LSZ nicht anwendbar ist, beispielsweise weil keine lokalen Operatoren existieren, die Übergänge zwischen dem Vakuum und geladenen Sektoren machen. Hier könnte meine Konstruktion einen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen liefern.

Speziell denke ich dabei an

- die Erzeugung von Teilchenzuständen mit Eichladungen. Die Eichladungen gehören zu Observablen aus dem Zentrum der Eichgruppe.

In lokalen Eichtheorien können diese Zustände nicht durch lokale Felder aus dem Vakuum erzeugt werden, da z.B. an den geladenen Teilchen ein ins Unendliche reichender String sitzt [BF 82]. Auch stehen diese Felder i.a. nicht von vorneherein zur Verfügung, da man bei den Konstruktionen zunächst von Vakuum-Erwartungswerten von eich-invarianten Größen ausgeht.

Die hier vervollständigte Araki-Haag-Methode eröffnet die Möglichkeit, den Partikelinhalt in systematischer Weise zu bestimmen. Die Methode beschränkt sich nicht auf allgemeine Existenzaussagen, sondern liefert ein konstruktives Verfahren, das man direkt auf Modelle anwenden kann.

- die Formulierung eines Kriteriums für die asymptotische Vollständigkeit einer Theorie, wie es von D. Buchholz vorgeschlagen wird.

Dabei steht man vor der Aufgabe, den Teilcheninhalt einer Feldtheorie zu bestimmen und darauf aufbauend den Raum aller Streuzustände zu konstruieren. Die Frage ist nun, ob die Streuzustände ausreichen, um alle Zustände zu charakterisieren, ob also die Feldtheorie eine vollständige Teilcheninterpretation hat. Diese Frage ist nicht von vorneherein evident. M. Rinke [Ri 69] konstruierte beispielsweise ein Modell, das nicht asymptotisch vollständig ist.

Eine Diskussion von Bedingungen, die die asymptotische Vollständigkeit einer Theorie festlegen könnten, findet man z.B. bei D. Buchholz [Bu 86 a] .

- die Präparation von Infra-Teilchen-Zuständen; also Zustände, zu denen zwar kein diskretes Massenhypربولoid gehört, die aber asymptotisch doch gewisse Teilcheneigenschaften aufweisen, wie sie z.B. in der Quantenelektrodynamik als Ein-Elektronen-Zustände mit einer Photonenwolke auftreten [Sc 63, Bu 82, Bu 86b, MS 85]. D. Buchholz schlug vor, zu prüfen, ob auch in diesem Fall die Araki-Haag-Methode anwendbar bleibt [Bu 86 a]. Dies ist wahrscheinlich, da, wie von Araki und Haag vorgeschlagen, bei der hier durchgeführten Konstruktion nicht versucht wird, die S-Matrix zu konstruieren. Man erhält statt dessen direkt die wohldefinierten Wirkungsquerschnitte.

Andere Vorschläge für die Konstruktion von Infra-Teilchen-Zuständen stammen von B. Weeks [We 83] und in störungstheoretischer Behandlung von O. Steinmann [St 74].

Diese Punkte lassen es gerechtfertigt erscheinen, trotz der warnenden Worte sich näher mit dem Problem der Konstruktion von Streuzuständen auseinanderzusetzen. Tatsächlich ist, zumindest in Beispielen, das Verfahren überraschend einfach und kann möglicherweise mit LSZ in den Fällen konkurrieren, bei denen die Konstruktion ladungstragender Felder kompliziert ist, wie z.B. bei nicht-abelschen Eichtheorien [St 85].

Die Aufgabe der Konstruktion liegt darin, einen Zustand zu bestimmen, der zu asymptotischen Zeiten aus n Teilchen mit vorgegebenen Massen m , Ladungen α und inneren Freiheitsgraden i besteht, die nahezu Impulseigenzustände sind. Dieser Zustand wird im allgemeinen eine von Null verschiedene Ladung tragen und deshalb nicht im Superauswahlsektor des Vakuums liegen. Durch Anwendung von Observablen auf das Vakuum wird man diesen Zustand nie erreichen können.

Als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Zuständen steht aber in konkreten Modellen normalerweise als eindeutig ausgezeichnete Zustand zunächst nur das Vakuum zur Verfügung – zum Beispiel im Rahmen des Feynman'schen Pfadintegral-Formalismus oder bei der störungstheoretischen Konstruktion von Modellen.

Auch ich werde den Vakuumzustand als Ausgangspunkt meiner Konstruktion benutzen. Da jedoch alle Sektoren per definitionem in Bezug auf die Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ in der Norm-Topologie abgeschlossen sind, kann man die geladenen Zustände nicht durch Folgen von Vektoren im Vakuumsektor approximieren. Stattdessen benutzt man geeignete Folgen von Erwartungswerten von Observablen im Vakuumsektor. Der schwache Limes dieser Folgen wird dann ein Funktional im gewünschten geladenen Sektor definieren. Durch die GNS-Konstruktion erhält man daraus den zum Sektor gehörenden Hilbertraum und darauf eine Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$.

Ich benutze hierzu, wie anfangs erwähnt, die Methoden von H. Araki und R. Haag. Danach können für rein massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen die zeitlichen Limiten von Erwartungswerten gewisser regularisierter Zähler geschrieben werden als Integrale über Summen von Erwartungswerten der Zähler in (evtl. geladenen) Ein-Teilchen-Zuständen.

D. Buchholz [Bu 86a] bewies daran anknüpfend, daß entsprechende Folgen immer Limespunkte haben, z.B. auch bei Anwesenheit von Infra-Teilchen, wo die LSZ-Methode versagt. Er schlug vor, die Araki-Haag-Limiten auch in diesem Fall zur Präparation von Zuständen zu benutzen.

Ein Hauptproblem bei der Durchführung der Konstruktion besteht darin, die Zähler so zu wählen, daß in den oben genannten Summen von Ein-Teilchen-Zuständen gerade die gewünschten Beiträge übrigbleiben.

Für die Definition der Folgen von Erwartungswerten wähle ich spezielle Zähler, die von einem Verschiebungsvektor $\hat{a}$ abhängen. Diese Zähler transportieren für $|\hat{a}| \rightarrow \infty$

gewisse ausgesuchte, geladene Teilchen raumartig nach Unendlich, so daß sie aus dem Zustand abseparieren. Zurück bleibt nach dem Grenzübergang ein Funktional, an dem effektiv nur Teilchen beteiligt sind, deren Gesamtladung zu der Ladung der wegtransportierten Teilchen konjugiert ist.

In der Intention ist dies vergleichbar mit der Konstruktion von B. Weeks [We 83], der seine Konstruktion jedoch nur heuristisch begründet.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert :

Nach dem einführenden Kapitel A, in dem kurz der bekannte allgemeine Rahmen der Untersuchungen dargelegt wird, und die Eigenschaften der Araki-Haag-Limiten referiert werden, folgt in Teil B der explizite Verlauf der Konstruktion geladener Zustände.

Dazu analysiert man als erstes die auftretenden Ein-Teilchen-Zustände. Der folgende Abschnitt widmet sich dann dem Problem der Wahl der Zähler, die Masse, Ladung und innere Freiheitsgrade unterscheiden sollen.

Mit diesen Informationen lassen sich dann Produkte von Zählern aufbauen, mit deren Hilfe aus einem beliebig vorgegebenen Zufalls-Zustand im Vakuum-Sektor der gewünschte geladene Zustand präpariert werden kann.

Die in Teil B vorgeschlagene Konstruktion ist recht allgemein anwendbar, also vermutlich auch auf Infra-Teilchen und Zustände mit Eichladungen. Gewisse Eigenschaften der definierten Prozesse, wie z.B. das Wegschieben der unerwünschten Teilchen, die mit Hilfe spezieller Zähler nach raumartig Unendlich geschickt wurden, konnte jedoch allgemein nicht bewiesen werden und mußte als Annahme vorausgesetzt werden. Daß diese Annahmen plausibel sind, wird in Teil C gezeigt, wo für den Spezialfall rein massiver Theorien mit lokalisierbaren Ladungen die Konsistenz aller Konstruktionsschritte bewiesen wird.

Um zu zeigen, wie einfach die Konstruktion in konkreten Beispielen ist, wird das Verfahren in Teil D in einer Theorie mit einem geladenen massiven Spin-0-Teilchen einmal explizit durchgeführt.

Zur Erklärung der in den Formeln benutzten Abkürzungen befindet sich eine Liste am Ende der Arbeit.

A : Grundlagen

a) Allgemeine Strukturen und Definitionen

Grundlage der Untersuchung sind die Axiome der lokalen Quanten-Feld-Theorie von Haag und Kastler [HK 64]. Ausgangspunkt ist die **Algebra** $\mathcal{A}$ der Observablen. Sie wird von einem Netz von lokalen C^* -Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ erzeugt, die den Messungen in offenen, beschränkten Gebieten $\mathcal{O}$ der Raum-Zeit entsprechen :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

Die Observablen erfüllen **Lokalität**, d.h. sie kommutieren, falls sie zu raumartig getrennten Gebieten gehören :

$$[\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) , \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = 0 , \quad \text{falls } \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$$

Zustände physikalischer Systeme werden durch positive, lineare, normierte Funktionale ω über der Algebra $\mathcal{A}$ dargestellt.

Raum-Zeit-Translationen um den Vektor x entsprechen Automorphismen α_x von $\mathcal{A}$

$$A(x) = \alpha_x(A) , \quad \text{für } A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

$$\alpha_x(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\mathcal{O} + x)$$

Die Konstruktion des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$ und der Darstellungen π der Algebra erfolgt aus Zuständen durch die GNS-Konstruktion.

Ich werde im Folgenden nur **Positive-Energie-Darstellungen** [BF 82] betrachten, d.h. Darstellungen $(\pi, \mathcal{H})$ der Observablen-Algebra $\mathcal{A}$, die das Borchers'sche Auswahlkriterium [Bo 65] erfüllen:

- i) die Automorphismen α_x sind durch stetige, unitäre Operatoren $U(x)$ auf $\mathcal{H}$ dargestellt

$$\pi(\alpha_x(A)) = U(x) \cdot \pi(A) \cdot U(x)^{-1}$$

- ii) das Spektrum $\text{sp} \mathcal{U}$ der zu $U(x)$ gehörenden Generatoren P erfüllt die relativistische Spektrumsbedingung

$$\text{sp} \mathcal{U} \subset \overline{V}_+ = \{ p \in \mathbb{R}^4 : p^2 \geq 0, p_0 \geq 0 \}$$

- iii) $U(x)$ kann im schwachen Abschluß von $\pi(\mathcal{A})$ gewählt werden

$$U(x) \in \pi(\mathcal{A})^-$$

- iv) jede Unterdarstellung von π hat die gleichen Eigenschaften. Nach der zentralen Zerlegung von π kann man sich auf die Betrachtung faktorieller Darstellungen beschränken

$$\pi(\mathcal{A})^- \cap \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C} \cdot 1.$$

d.h. auf Zustände mit fester Ladungs-Quantenzahl,

- v) in den faktoriellen Darstellungen wird die noch freie additive Konstante von P durch eine stärkere Einschränkung des Spektrums auf den Vorwärtslichtkegel fixiert

$$\{ q \in \overline{V}_+ : \text{sp} \mathcal{U} \subset \overline{V}_+ + q \} = \{ 0 \}$$

Das Spektrum ist damit Lorentz-invariant, auch für den Fall, daß im Ortsraum die Lorentz-Invarianz gebrochen ist [BB 85, Bo 85].

Außerhalb des Vakuum-Sektors ist das Spektrum der Generatoren $\hat{P}$ der Raumtranslationen $U(\hat{x})$ Lebesgue-absolut stetig [BF 82].

Die Klassen von unitär äquivalenten, irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$ bilden die **Superauswahl-Sektoren**. Man unterscheidet sie durch Ladungs-Quantenzahlen.

Für rein massive Theorien sind das Vakuum und die Ein-Teilchen-Zustände die elementaren Systeme :

- i) $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ heißt **massive Vakuum-Darstellung**, falls $0 \in \text{sp } \mathcal{U}$ – das Vakuum als räumlich homogener und zeitlich stationärer Zustand in $\mathcal{H}$ – und $\text{sp } \mathcal{U} \subset \{0\} \cup \{p : p^2 \geq \mu^2, p_0 \geq 0\}$, für ein $\mu > 0$
- ii) $(\pi, \mathcal{H})$ heißt **massive Ein-Teilchen-Darstellung**, falls die Menge $H_m = \{p : p^2 = m^2, p_0 \geq 0\}$ – das Massen-Hyperboloid zur Masse m – im singulären Teil des Spektrums von P enthalten ist, und $\text{sp } \mathcal{U} \subset H_m \cup \{p : p^2 \geq M^2, p_0 \geq 0\}$, für ein $M > m > 0$.

Für die Konstruktion des Streuzustandes nehme ich an, daß faktorielle Ein-Teilchen-Darstellungen äquivalent sind zu einem Multiplum von irreduziblen Ein-Teilchen-Darstellungen (mit endlicher Statistik). Für massive Theorien wurde das in [BF 82] bewiesen unter der Voraussetzung, daß die Vakuumdarstellung folgende schwache Dualitäts-Bedingung für jeden raumartigen Kegel $\mathcal{J}$ erfüllt

$$\pi_0(\mathcal{A}^c(\mathcal{J}))^\perp = \pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{J}))'$$

Zur Konstruktion reicht die Menge der strikt lokalen Operatoren nicht aus. Es werden Operatoren $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ benötigt, die mit Testfunktionen $f(x)$ verschmiert sind

$$B = \int d^4x f(x) \pi(A(x))$$

Diese Operatoren sind nur noch **fastlokal**, d.h. für jede Umgebung $\mathcal{O}$ des Ursprungs im Minkowski-Raum und jedes $\lambda > 0$ kann man Operatoren $B_\lambda \in \pi(\mathcal{A}(\lambda \cdot \mathcal{O}))^\perp$ finden, so daß

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n \cdot \|B - B_\lambda\| = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Der Träger der Fouriertransformierten $\tilde{f}(p)$ legt den Impulsübertrag des Operators B fest. Falls $\tilde{f}$ seinen Träger im Komplement von $\overline{V}_+$ hat, folgt aus der relativistischen Spektrumsbedingung, daß B das Vakuum vernichtet. Der Operator $C = B^* \cdot B$ hat die Eigenschaften eines Detektors [AH 67], der auf Exzitationen des Vakuums anspricht.

Er ist ein **Zähler**, d.h.

$$C \text{ ist fastlokal und positiv,} \\ C \cdot \Omega = C^* \cdot \Omega = 0.$$

$\mathcal{C}$ ist die $*$ -Algebra, die man durch endliche Linearkombinationen und Produkte solcher C erhält. Die schwachen Abschlüsse von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}$ stimmen auf allen Superwahl-Sektoren, bis auf den Vakuum-Sektor, überein. [Bu 86a]

b) Existenz der Limiten von $C(t;h)$

1967 zeigten H. Araki und R. Haag [AH 67], daß in rein massiven, asymptotisch vollständigen Theorien mit lokalisierbaren Ladungen folgende Mittelungen der observablen Zähler C für $|t| \rightarrow \infty$ auf einer dichten Menge von Vektoren schwach konvergieren :

$$C^{as}(h) = w\text{-}\lim_t C(t;h)$$

$$\text{mit: } C(t;h) = \int d^3\mathbf{x} \, h(\mathbf{x}/t) C(t,\mathbf{x}), \quad h \text{ beschränkt}$$

Explizit erhält man

$$\lim_t (\Psi, C(t;h) \cdot \Phi) = \sum_{\substack{m,\alpha \\ i,j}} \int d^3\mathbf{p} \, h\left(\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}\right) \langle \mathbf{p}, m, \alpha, i | C | \mathbf{p}, m, \alpha, j \rangle \cdot (\Psi, \rho^{as}(\mathbf{p}, m, \alpha, i, j) \cdot \Phi) \quad (*)$$

Die Summe erstreckt sich über alle diskreten Massenhypersphäre H_m , Superauswahl-Sektoren α und die inneren (Spin-) Freiheitsgrade i, j . $|\mathbf{p}, m, \alpha, i\rangle$ sind die uneigentlichen Impuls-Eigenzustände zur Masse m , Ladung α , Spin i , ρ^{as} ist der Operator zur asymptotischen Impulsraum-Dichte der entsprechenden Teilchen. Produkte von Zählern $C_i(t;h_i)$ mit disjunkten Trägern von $h_i(\hat{v})$ ergeben im Limes eine entsprechende Formel mit einem Produkt von uneigentlichen Matrixelementen $\langle \mathbf{p}, m, \alpha, i | C | \mathbf{p}, m, \alpha, j \rangle$.

V. Enß [En 75] zeigte, daß die Folgen $C_i(t;h_i)$ im obigen Fall sogar stark konvergieren, falls die Zähler C den Ein-Teilchen-Raum invariant lassen. Dies ist jedoch eine zu starke Voraussetzung. In Teil C wird gezeigt, daß es für die starke Konvergenz ausreicht, wenn man fordert, daß die Zähler von einem, durch beschränkte Funktionen h mit kompaktem Träger vorgegeben, kompakten Teilbereich des Ein-Teilchen-Hypersphäroids zur Masse m aus nur Übergänge auf dasselbe Hypersphäroid machen. Falls die Massenschalen sich unterhalb des Kontinuums nicht häufen, ist dies für die vorliegende Konstruktion im massiven Fall mit Hilfe massen-separierender Zähler immer erfüllbar, da hier nur Zähler mit einem beliebig kleinen Energie-Impuls-Übertrag benötigt werden.

D. Buchholz bewies 1986 [Bu 86a], daß die Folgen $C(t;h)$ immer (evtl. mehrere) Limespunkte $C^{as}(h)$ haben, die als (Infra-) Teilchen-Zähler interpretiert werden können. Sei das (nichttriviale) Funktional σ einer dieser Limespunkte für einen Zustand Φ im Vakuum-Sektor

$$\sigma(C) = \lim_t (\Phi, C(t;h) \cdot \Phi),$$

dann hat σ die Eigenschaften eines uneigentlichen Ein-Teilchen-Zustandes. Dies ist konsistent mit der Gleichung (*).

Zusammenfassend gilt also : Für rein massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen konvergieren die Folgen $C(t; h)$, und nichttriviale σ entsprechen uneigentlichen Ein-Teilchen-Zuständen. Im allgemeinen Fall sollte dies auch so sein, was aber hier nicht bewiesen werden konnte.

These : Für die Konstruktion des Streuzustandes setze ich voraus, daß die Folgen der Zähler $C_i(t; h_i)$ stark auf Zuständen beschränkter Energie konvergieren, für beschränkte Funktionen h und Zähler C mit genügend kleinem Energie-Impuls-Übertrag.

Wegen der starken Konvergenz kann man dann diese Vorgehensweise, wie im massiven Fall mit lokalisierbaren Ladungen, auf beliebige Produkte von Operatoren $C_i(t; h_i)$ erweitern. Dies ist der Ausgangspunkt der Konstruktion von geladenen Zuständen aus einem beliebigen energie-beschränkten Zustand ω im Vakuum-Sektor.

B : Konstruktion des Streuzustandes

a) Analyse des Ein-Teilchen-Inhaltes der Theorie

Der erste Schritt der Konstruktion besteht in der Wahl eines beliebigen Zufallszustandes ω mit beschränkter Energie im Vakuumsektor : Man wähle dazu eine beliebige Observable A und bilde den Vektor $P_0(E) \cdot A \cdot \Omega$ und den entsprechenden Zustand $\omega(\cdot) = N \cdot (P_0(E) \cdot A \cdot \Omega, \cdot P_0(E) \cdot A \cdot \Omega)$, N : Normierungsfaktor, $P_0(E)$: Projektor auf Zustände mit Energie kleiner als E .

Man analysiert dann den asymptotischen Teilcheninhalt von ω durch Studium des Funktional σ_h

$$\sigma_h(C) = \lim_t \omega(C(t; h))$$

Es ist zweckmäßig, $h \equiv 1$ zu setzen. Der Limes sollte nach den obigen Annahmen existieren.

These : σ_h soll, wie Fall massiver Teilchen mit lokalisierbaren Ladungen, Beiträge von allen in ω asymptotisch auftretenden Teilchentypen enthalten.

Falls die Theorie eine (Infra -) Teilchen-Interpretation besitzt, kann also σ_h nicht das Null-Funktional sein. Man macht dann die GNS-Konstruktion und erhält die Darstellung $(\pi_h, \mathcal{H})$. Das Zentrum von $\pi_h(\mathcal{C})''$ gibt Auskunft über die Superauswahl-Sektoren (Ladungstypen) der Partikel.

These : Die nach der zentralen Zerlegung von σ_h erhaltenen, faktoriellen Darstellungen sollen direkten Summen von irreduziblen **Ein-Teilchen-Darstellungen** entsprechen (im Fall rein massiver Teilchen beweisbar [BF 82]).

Auch sollte wegen der endlichen Energie des Zustandes ω in der Summe nur eine endliche Zahl von Darstellungen beitragen. Das Massenspektrum soll also keine Häufungspunkte im Endlichen besitzen.

Nach einem Theorem von R. V. Kadison [Ka 57] kann man zu einer endlichen Familie von wechselseitig inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen $\{ \pi_i, \mathcal{H}_i \}$ einer C^* -Algebra $\mathcal{A}$ und endlich-dimensionalen Projektoren E_i immer Elemente $A \in \mathcal{A}$ finden, die in den einzelnen Darstellungen auf den herausprojizierten Vektoren wie beliebig vorgegebene Operatoren $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ wirken.

Durch die Wahl von $T_i = 0$ für alle Sektoren bis auf einen beweist das für vorgegebene Vektoren die Existenz von **Projektoren** auf die einzelnen Sektoren.

b) Diagonalisierung der Formfaktoren

In den Limiten von Araki - Haag trägt auf Grund des stärkeren Gewichts von stationären Punkten bei der Impulsintegration eine Summe von Formfaktoren $\langle \mathbf{p}, m, \alpha, i | C | \mathbf{p}, m, \alpha, j \rangle$ bei. Die Summe erstreckt sich über alle diskreten Massenhypersphären H_m , Superauswahl-Sektoren α und die inneren Freiheitsgrade i, j . Die Matrixelemente sind also bereits bezüglich der auftretenden Massen und Ladungsquantenzahlen diagonal. Eine analoge Struktur der Araki-Haag - Limiten erwartet man auch im allgemeinen Fall.

Bei der Konstruktion eines Streuzustandes gibt man für jedes Teilchen dessen Masse m , Sektor α und Spinkomponente i vor. Um aus einem Zufallszustand genau dieses gewünschte Teilchen herauszufiltern, benötigt man Operatoren C , für die die obigen Matrixelemente nur für diese vorgegebenen Parameter von Null verschieden sind.

Die explizite Konstruktion von Projektions-Operatoren erfolgt zuerst auf dem Unterraum $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ zu festem Impuls $\mathbf{p}$ und fester Masse m .

These : Für beliebige offene Umgebungen Δ von Impulsen p , die zu Zuständen auf den Ein-Teilchen-Räumen gehören, lassen sich
 α) Vektoren Ψ_a konstruieren, die auf allen $\mathcal{H}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in \Delta$, Orthonormal-Basis

sen $\psi_a(p)$ definieren

$$(\psi_a(\mathbf{p}), \psi_b(\mathbf{p})) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Psi_a, U(\mathbf{x}) \cdot \Psi_b) = \delta_{ab}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta,$$

β) Zähler C angeben, deren Matrixelemente $M_{\mathbf{p}}(C)_{ab}$ in dieser Basis

$$M_{\mathbf{p}}(C)_{ab} = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})} (\Psi_a, U(\mathbf{x}) \cdot C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Psi_b)$$

für die gesamte offene Umgebung Δ konstant sind,

und aus denen man durch Linearkombinationen Projektoren auf die gesuchten (und erlaubten) Quantenzahlen bildet

$$M_{\mathbf{p}}(E^c) = \delta_{ab} \cdot \delta_{ac}, \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta.$$

Wie man solche Operatoren konstruiert, wird in Kapitel C näher erklärt.

Dort ist auch ausgeführt, wie man mit diesen Operatoren die Form des Massenspektrums und die Struktur der Superauswahlsektoren testet.

c) Test des Teilcheninhaltes des Zufallszustandes ω

Es soll nun ausgehend von einem beliebigen Zufallszustand ein einlaufender bzw. auslaufender Streuzustand konstruiert werden, der eine Konfiguration von n Partikeln mit vorgegebenen Massen, Ladungen und inneren Freiheitsgraden beschreibt. Dazu muß zunächst geprüft werden, ob in dem gewählten Zufallszustand die gewünschte Konfiguration auftritt.

Man verwendet die in Teil b) erwähnten speziellen Zähler, die auf die gewünschten Quantenzahlen projizieren :

$$C_v = C(m_v, \alpha_v, i_v) \quad \text{und}$$

$$C_v(t; h_v) = \int d^3\mathbf{x} h_v(\mathbf{x}/t) \cdot C_v(t, \mathbf{x}).$$

Die einzelnen $\text{supp } h_v$ sind dabei disjunkt und haben kompakten Träger.

These : Man kann die Zähler $C_v(t; h_v)$ so wählen, daß sie für $|t| \rightarrow \infty$ eine bestimmte Energie E_v registrieren (innerhalb eines engen Bereiches ΔE).

Für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen benutzt man dazu die in Kapitel C konstruierten Massenseparations-Operatoren, die eine bestimmte Masse m auswählen. Über den $\text{supp } h_v$ wird in den Araki-Haag-Limiten der Geschwindigkeitsbe-

reich der Ein-Teilchen-Zustände festgelegt, und daraus berechnen sich die beitragenden Impulse und Energien wie folgt

$$\vec{p} = \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad E = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \vec{v} \in \text{supp } h_v.$$

These : Für fast alle (offene Mengen) Zufallszustände ω gilt

$$\lim_t \omega \left(\prod_{v=1}^n C_v(t; h_v)^* \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t; h_v) \right) > 0.$$

Die Zähler C_v wurden so gewählt, daß ihre Produkte nicht den Nulloperator darstellen. Die Menge $\mathbf{K}$ der Zustände in $\mathcal{H}$, für die der Limes des linearen Operators $\prod C_v(t; h_v)^* \cdot \prod C_v(t; h_v)$ verschwindet, muß als Operatorkernel deshalb ein abgeschlossener, echter linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ sein, der nirgends dicht ist. Das Komplement dazu, die Menge der Zustände, für die gilt

$$\lim_t \omega \left(\prod_{v=1}^n C_v(t; h_v)^* \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t; h_v) \right) > 0,$$

enthält als G_δ -Menge fast alle Zustände [Qu 76].

Für das weitere Vorgehen unterscheidet man zwei Fälle :

i) Der gesuchte Zustand liegt im Vakuum-Sektor. Dann schneidet man die Energie des Zufallszustandes knapp oberhalb der Summe der Ein-Teilchen-Energien E_v ab.

These : Für fast alle Ψ ist der Zustand $s\text{-}\lim_t \prod_{v=1}^n C_v(t; h_v) \cdot P_0(E) \cdot \Psi$, $E = \sum_v E_v + \varepsilon$, für genügend kleines ε , ein n -Teilchen-Zustand, falls die Träger der h_v disjunkt gewählt wurden ($P_0(E)$ ist dabei der Projektor auf die Zustände mit Energie $\leq E$ im Vakuum-Sektor).

ii) $\lim_t \prod_{v=1}^n C_v(t; h_v) \cdot P_0(E) \cdot \Psi = 0$. Im massiven Fall mit lokalisierbaren Ladungen bedeutet das, daß die durch die Zähler C_v festgelegten Teilchen eine Gesamtladung ungleich Null haben.

These : Es gibt stets eine Erweiterung der C_v , $v = 1, \dots, n$, durch Zähler

A_μ , $\mu = 1, \dots, n'$, so daß für fast alle ω gilt

$$\lim_t \omega \left(\prod A_v(t; \chi_v)^* \cdot \prod C_v(t; h_v)^* \cdot \prod C_v(t; h_v) \cdot \prod A_\mu(t; \chi_\mu) \right) > 0,$$

auch nachdem die Energie des Zustandes ω knapp oberhalb der Summe der Ein-Teilchen-Energien zu den Zählern C_v und A_μ abgeschnitten wurde.

$\lim_t \prod_{v=1}^n C_v(t; h_v) \cdot \prod_{\mu=1}^{n'} A_\mu(t; \chi_\mu) \cdot P_0(E_C + E_A) \cdot \Psi$ ist ein $(n + n')$ -Teilchen-Zustand.

Der erste Teil der These sollte wegen der G_δ -Eigenschaft für das Komplement des Kernes von $P_o(E_C + E_A) \cdot \prod A_\mu^* \cdot \prod C_\nu^* \cdot \prod C_\nu \cdot \prod A_\mu \cdot P_o(E_C + E_A)$ erfüllt sein.

Die **Energie-Begrenzung** garantiert, daß nicht mehr als die gewünschten $n+n'$ Teilchen in dem getesteten Teil des Zustandes beitragen. Die disjunkten Träger der Funktionen h_ν und χ_ν in den Zählern sorgen dafür, daß es auch mindestens $n+n'$ Teilchen sind, da die Kommutatoren der asymptotischen Zähler verschwinden.

Für asymptotisch vollständige, massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen werden diese Thesen in Kapitel C bewiesen.

Man erhält dort für die Anwendung eines n -fachen Produktes von Zählern C_ν auf die Haag-Ruelle-Approximationen eines n -Teilchen-Zustandes

$$\prod_{\nu=1}^n C_\nu(t; h_\nu) \cdot \prod_{i=1}^n \psi_i(t)^* \cdot \Omega = \sum_{\text{Perm } i} \prod [C_{P_i}(t; h_{P_i}), \psi_i(t)^*] \cdot \Omega +$$

+ Mehrfachkommutatoren der C_ν , die im Limes t verschwinden .

*d) Separation der kompensierenden Ladungen
und Konstruktion des Streuzustandes*

Durch die Zähler $C_\nu(t; h_\nu)$ und evtl. $A_\nu(t; \chi_\nu)$ hat man eine gewisse, im Zustand ω auftretende Teilchenkonfiguration aus $n+n'$ Partikeln fixiert. Nur sind die n' Teilchen, die zu den Zählern $A_\nu(t; \chi_\nu)$ gehören, zuviel.

Die Idee ist es nun, diese zusätzlichen Teilchen durch einen weiteren Grenzübergang nach raumartig Unendlich zu schieben, so daß sie bei Messungen in lokalen Gebieten $\mathcal{O}$ nicht mehr beitragen.

Diese Vorgehensweise ist in der Intention vergleichbar mit der Konstruktion von geladenen Zuständen bei B. Weeks [We 83]. Weeks begründet seine Konstruktion jedoch nur heuristisch. Er benutzt zwar als Ausgangspunkt der Konstruktion von Zuständen ebenfalls nur lokale, eichinvariante Observable, wie z.B. die Energie-Impuls-Dichte $T_{\mu\nu}$ und die Stromdichte j_μ . Aus diesen konstruiert er dann aber Projektionsoperatoren auf die gewünschten Teilchentypen, inklusive zusätzlicher, nichterfaßter Partikel, indem er nicht-definierbare Operator-Limiten für $t \rightarrow \infty$ ausführt. So erhaltene Projektoren schaltet er hintereinander und parallel, um gewünschte Konfigurationen aus einem Zufallszustand zu erhalten. Um Infrarot-Diver-

genzen bei der Präparation von geladenen Zuständen in der QED zu vermeiden, präpariert er geladene Teilchen immer paarweise, zusammen mit den entsprechenden Anti-Teilchen. Dann wendet er aus den Projektionsoperatoren gebildete 'Verschiebungsoperatoren' auf den herausprojizierten Zustand an, die die zusätzlichen Teilchen raumartig nach Unendlich wegschieben sollen, damit sie aus dem Zustand abseparieren. Dieser Prozeß ist im Vergleich zu dem hier präsentierten Verfahren jedoch nicht wohldefiniert und so nicht durchführbar.

Zum Verschieben benutze ich mit speziellen Funktionen $h_{\hat{a}}$ gemittelte Zähler $A(t;h_a)$, mit

$$h_{\hat{a}}(\hat{v}) = \exp\left[-i \hat{a} \cdot \frac{\hat{v}}{\sqrt{1-\hat{v}^2}}\right] \cdot \chi(\hat{v})$$

These : Durch Variation des Parameters $\hat{a}$ läßt sich das Lokalisationsgebiet der asymptotischen Zähler $s\text{-}\lim_t A(t;h_a)$ verschieben.
Für $|\hat{a}| \rightarrow \infty$ wandert dieses Gebiet nach raumartig unendlich.

Für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen erhält man für diese asymptotischen Zähler in den Araki-Haag-Limiten $|t| \rightarrow \infty$ zusätzlich zu der Funktion $\chi(\hat{p}/\omega_{\hat{p}})$, die den Impulsbereich fixiert, einen Faktor $\exp[-i \hat{a} \cdot \hat{p}/m]$. Dies hat den Effekt, daß die asymptotischen Zähler aktiv die ansprechenden Teilchen um $\hat{a}/m$ verschieben, obwohl die Zähler $A(t;h_a)$ selbst für feste endliche Zeiten t für alle Werte von $\hat{a}$ in einem Gebiet um $\hat{v} \cdot t$, $\hat{v} \in \text{supp } \chi$, lokalisiert sind.

Das gesuchte **n-Teilchen-Funktional** ω_n^{as} ist somit wie folgt definiert :

Man prüft den Zufallszustand ω auf die Anwesenheit der gewünschten Teilchen, bestimmt die eventuell notwendigen zusätzlichen Zähler A_v und legt die Abschneide-Energie E fest. Dann wählt man für jedes der unerwünschten Teilchen eine andere Richtung $\hat{a}_v$.

$$\omega_n^{as}(A) = \lim_{\hat{a}_v} \lim_t \omega(P_o(E) \cdot \prod_{v=1}^{n'} A_v(t;h_{a_v})^* \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t;h_v)^* \cdot A \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t;h_v) \cdot \prod_{v=1}^{n'} A_v(t;h_{a_v}) \cdot P_o(E)) / N_h$$

für $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$, $\|A\| < \infty$, $\mathcal{O}$ beliebiges endliches Gebiet in der Raum-Zeit,

$$N_h = \lim_{\hat{a}_v} \lim_t \omega(P_o(E) \cdot \prod_{v=1}^{n'} A_v(t;h_{a_v})^* \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t;h_v)^* \cdot \prod_{v=1}^n C_v(t;h_v) \cdot \prod_{v=1}^{n'} A_v(t;h_{a_v}) \cdot P_o(E))$$

These : Der Grenzübergang $|\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}| \rightarrow \infty$ existiert, da die entsprechenden Beiträge clustern, und $N_h > 0$.

ω_n^{as} ist ein positiver, normierter n -Teilchen-Zustand, bei dem die Quantenzahlen durch die Zähler C_v festgelegt sind.

Für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen wird dies in Kapitel C bewiesen. Im Nenner N_h wie auch im Zähler des Funktionals clustern die Beiträge der um $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{v}}$ verschobenen Teilchen weg. Der Operator $A \in \mathcal{A}(\mathbf{0})$ wirkt nur auf die gewünschten n Teilchen, bei denen Masse, Ladung und Spin vorgegeben wurden

$$\begin{aligned} \omega_n^{as}(A) &= \int \prod_{i,j}^n d^3 \mathbf{p}_i d^3 \mathbf{q}_j \overline{h_i(\frac{\mathbf{p}_i}{\omega_i})} \cdot h_j(\frac{\mathbf{q}_j}{\omega_j}) \int \prod_k^{n'} d^3 \hat{\mathbf{r}}_k |\chi_k(\frac{\hat{\mathbf{r}}_k}{\omega_k})|^2 \cdot \\ &\cdot \sum_{Perm} \rho_n(\mathbf{p}_{P_1}, m_{P_1}, \alpha_{P_1}, i_{P_1}; \dots; \hat{\mathbf{r}}_{P_k}, \dots; \mathbf{q}_{P_j}, \dots; \hat{\mathbf{r}}_{P_l}, \dots) \cdot \\ &\cdot {}^{as} \langle \mathbf{p}_1, m_1, \alpha_1, i_1; \dots; \mathbf{p}_n, m_n, \alpha_n, i_n | A | \mathbf{q}_1, m_1, \alpha_1, i_1; \dots; \mathbf{q}_n, \dots \rangle^{as} / N_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } N_h &= \int \prod_i^n d^3 \mathbf{p}_i |h_i(\frac{\mathbf{p}_i}{\omega_i})|^2 \int \prod_k^{n'} d^3 \hat{\mathbf{r}}_k |\chi_k(\frac{\hat{\mathbf{r}}_k}{\omega_k})|^2 \cdot \\ &\cdot \sum_{Perm} \rho_n(\mathbf{p}_{P_1}, m_{P_1}, \alpha_{P_1}, i_{P_1}; \dots; \hat{\mathbf{r}}_{P_k}, \dots; \mathbf{p}_{P_j}, \dots; \hat{\mathbf{r}}_{P_l}, \dots) \cdot \end{aligned}$$

Der Zustand ω_n^{as} ist über einen kleinen Impulsbereich gemittelt, der durch die Träger von h_v bzw. χ_v vorgegeben ist. In diese Mittelung gehen Eigenschaften der unbekannten Zufalls-Anfangs-Wellenfunktion ein.

Für lokal erzeugte Zustände ist die Wellenfunktion im Impulsraum glatt – beweisbar über das Abfallverhalten der Fourier-Transformierten im Ortsraum, vgl. Lemma in Kapitel C, Teil a) $|(\Psi_1, U(\mathbf{x}) \cdot \Psi_2)| \leq c_n \cdot (1 + |\mathbf{x}|)^{-n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, für $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{D}$.

Für die Matricelemente ${}^{as} \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | A | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \rangle^{as}$ gilt allgemein, daß sie Distributionen in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{6n})$ sind, für nichtüberlappende Impulse eindeutig definiert [BLR 85].

Für Zustände mit massiven Teilchen gilt sogar für fastlokale A :

$$\langle \mathbf{p} | A | \mathbf{q} \rangle = \omega_o(A) \cdot 2\omega_{\mathbf{p}} \cdot \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{ ist eine } C^\infty\text{-Funktion in } \mathbf{p} \text{ und } \mathbf{q} \text{ [BF 79].}$$

Falls also die $\text{supp } h$ genügend klein gewählt werden, kürzen sich in dem normierten n -Teilchen-Zustand ω_n^{as} , der schon die richtigen gesuchten Massen, Ladungen und inneren Freiheitsgrade aufweist, die jetzt nahezu konstanten Anteile der Wellenfunktion im Zähler und Nenner weitestgehend heraus, und das Funktional ω_n nähert sich mehr und mehr dem nicht-normierbaren uneigentlichen n -Teilchen-Zustand mit festen Impulsen $\mathbf{p}_v$, mit einer kleinen Unschärfe, die man unter die

experimentelle Unschärfe drücken kann.

Da bei der Variation des Trägers von $h_\nu(\hat{\nu})$ der Anfangszustand ω unverändert bleibt, ist auch die Phasenlage auf dem Weg zu dem vorgegebenen $\hat{\mathbf{p}}_\nu$ fixiert.

Ob der Anfangszustand ω genügend glatt ist, läßt sich in Modellen testen, indem man die Sensibilität des Funktional ω_n gegenüber kleinen Veränderungen der $\text{supp } h_\nu$ betrachtet.

Zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten für die Streuung von Teilchen könnte man kommen, indem man durch die obige Konstruktion für $t \rightarrow -\infty$ einen Teilchenzustand präpariert und dann den Erwartungswert von $\omega_n^{\text{in}}(A(s))$ betrachtet, wobei man das Lokalisationsgebiet der Observablen $A(s)$ zeitlich nach Unendlich schiebt $s \rightarrow +\infty$. Erst in den Wirkungsquerschnitten dürfte der Grenzübergang $h(\hat{\nu}) \rightarrow \delta^3(\hat{\nu} - \hat{\nu}_0)$ attraktiv sein.

Man könnte auch 'S-Matrixelemente' definieren, z.B. indem man eine Zählergruppe nach plus Unendlich und die andere nach minus Unendlich schickt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow -\infty} \omega \left(\prod C_i(s; h_i) \cdot \prod C_j(t; h_j) \right) .$$

Das Separieren der unerwünschten Teilchen sollte hierbei ähnlich vonstatten gehen. Jedoch treten die 'Phasen' von ω hier auf, so daß nur der Betrag des obigen Ausdruckes sinnvoll erscheint.

In Teil C wird die Konvergenz des Konstruktionsverfahren für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen bewiesen. Aber auch zur Präparation von massiven Infra-Teilchen-Zuständen (inklusive weicher Photonen) in Theorien mit Masse-Null-Teilchen scheint mir die Anwendung des Verfahrens möglich, da in den Thesen zur Konstruktion nirgends explizit Eigenschaften einer rein massiven Theorie benötigt wurden. In den Schlußbemerkungen werde ich nochmal näher darauf eingehen.

C : Beweisteil

a) Diagonalisierung der Formfaktoren

Wie schon in Kapitel B erwähnt, muß man zur Konstruktion eines Streuzustandes zu vorgegebenen Quantenzahlen aus einem beliebigen Anfangs-Zufalls-Zustand genau die Teilchen mit den gewünschten Massen, Ladungen und Spin-Freiheitsgraden herausfiltern.

Der erste Schritt dazu liegt in der Konstruktion einer Orthonormalbasis $\psi_a(\mathbf{p})$ für eine offene Umgebung Δ von p auf einer vorgegeben Massenschale H_m .

Im zweiten Schritt werden für diese Basis Zähler C konstruiert, deren Formfaktoren $\langle \mathbf{p}, m, a | C | \mathbf{p}, m, a \rangle$ in einer durch den Träger von $h(\hat{v})$ vorgegebenen Umgebung von $\mathbf{p}$ nur für die gesuchten Massen und Quantenzahlen a beitragen.

α) Konstruktion einer Orthonormalbasis

Bei der Analyse des Ein-Teilchen-Inhaltes der Theorie erhielt man durch die GNS-Konstruktion zu dem Funktional σ_h die Darstellung $(\hat{\pi}_h, \hat{\mathcal{H}})$. Das Zentrum von $\pi_h(\mathcal{C})''$ gab Auskunft über die Superauswahl-Sektoren der Partikel. Ich nahm an, daß die nach der zentralen Zerlegung erhaltenen faktoriellen Darstellungen $(\pi_h, \mathcal{H})$ direkten Summen von irreduziblen Ein-Teilchen-Darstellungen entsprechen.

Nach den Annahmen in Teil A ist außerhalb des Vakuum-Sektors das Spektrum der Generatoren $\hat{\mathbf{P}}$ der Raum-Translationen $U(\hat{\mathbf{x}})$ Lebesgue-absolut stetig. Rein auf Grund der Lokalität gilt, daß in der Zerlegung

$$\mathcal{H}^1 = \int d^3\mathbf{p} \mathcal{H}(\mathbf{p})$$

eines Ein-Teilchen-Raumes in Bezug auf den räumlichen Impuls fast alle Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ die gleiche Dimension haben. Die Existenz von Lorentz-Transformationen ist dazu nicht notwendig [BF 82].

Wegen der beschränkten Energie der Zustände hatte ich auch angenommen, daß die Zahl dieser Freiheitsgrade beschränkt ist. Das Massenspektrum sollte keine Häufungspunkte im Endlichen besitzen.

Die **Konstruktion der Unterräume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$** zu festem Impuls $\mathbf{p}$ und Masse m geschieht folgendermaßen :

Man zerlegt den Hilbertraum $\mathcal{H}$, der zu den oben erwähnten direkten Summen von irreduziblen Ein-Teilchen-Darstellungen gehört, mit Hilfe von spektralen Projektoren $E(\Delta_i)$ in Anteile mit Energie-Impuls in offenen Gebieten Δ_i .

Zur Definition einer auf $\mathcal{H}$ dichten Domäne $\mathcal{D}$ benutze ich spezielle, von D. Buchholz und K. Fredenhagen [BF 82] konstruierte Operatoren B mit folgenden Eigenschaften :

Theorem :

Seien Δ_1, Δ_2 beliebige Umgebungen von Punkten p_1 und p_2 auf der Massenschale zur Masse m , dann existieren Gebiete $\Delta_1^\sim \subset \Delta_1, \Delta_2^\sim \subset \Delta_2$ und eine Familie von fastlokalen Operatoren B_g , die zu glatten Funktionen g auf $\mathbf{R}^4$ gehören, so daß folgende Relationen gelten :

- i) $B \cdot E(\Delta_1^\sim) \neq 0$
- ii) $(g(P) \cdot B - B_g) \cdot E(\Delta_1^\sim) = 0$
- iii) $E(\Delta_2^\sim) \cdot (g(P) \cdot B - B_g) = 0$
- iv) $B \cdot E(\Delta_1^\sim) = E(\Delta_2^\sim) \cdot B \cdot E(\Delta_1^\sim)$

B ist hierbei der Operator, der zur konstanten Funktion $e(p) = 1$ gehört.

Speziell von Interesse ist die Menge der Operatoren, die die obigen Relationen erfüllen und einen so kleinen Energie-Impuls-Übertrag machen, daß sowohl $\Delta_1^\sim$ als auch $\Delta_2^\sim$ Umgebungen eines vorgegebenen Impulses p auf der Massenschale H_m sind. Diese Operatoren nenne ich Operatoren vom BF-Typ.

Sie bilden ein Ideal innerhalb aller fastlokalen Operatoren mit diesem minimalen Energie-Impuls-Übertrag :

Denn sei C_Γ ein beliebiger Operator, der einen genügend kleinen Energie-Impuls-Übertrag Γ macht, so daß $\Delta + \Gamma$ noch in $\Delta_1^\sim$ liegt. Dann ist der Operator $B_g \cdot C_\Gamma$ vom BF-Typ, da

$$\begin{aligned} B_g \cdot C_\Gamma \cdot E(\Delta) &= B_g \cdot E(\Delta + \Gamma) \cdot C_\Gamma \cdot E(\Delta) = \\ &= g(P) \cdot B \cdot E(\Delta + \Gamma) \cdot C_\Gamma \cdot E(\Delta) = g(P) \cdot B \cdot C_\Gamma \cdot E(\Delta) \end{aligned}$$

Analog gelten die restlichen Bedingungen, auch für $C_\Gamma \cdot B_g$.

Speziell sind Produkte solcher B und der adjungierte Operator B^* wieder Operatoren vom BF-Typ, falls man die Gebiete $\Delta_i^{\sim}$ und den Impulsübertrag von B klein genug wählt.

Der vorgegebene Impuls p zur Masse m liege nun in Δ . $\mathcal{H}$ sei der Unterraum zu einer der irreduziblen Darstellungen, die man nach der zentralen Zerlegung von σ_h erhalten hatte.

Die Ladungs-Sektoren der Vektoren in den verschiedenen $\mathcal{H}$ kann man unterscheiden, indem man die schwachen Limespunkte der Folgen fastlokaler Operatoren $\exp(i\lambda \cdot Q_V) \xrightarrow{V \rightarrow \mathbf{R}^3} \exp(i\lambda \cdot q_\alpha)$ betrachtet. $Q_V = \int_V d^3\mathbf{x} j_0(\mathbf{x})$, V beschränkt, q_α Ladung des Sektors.

Definition :

$\mathcal{D} =$ lineare Hülle von $\{ \Phi : \Phi = B \cdot A \cdot \Psi, \Psi \in E(\Delta_q) \cdot \mathcal{H} \} \subset E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$

Δ_q : offenes Energie-Impuls-Gebiet um q, auf derselben Massenschale wie p, $q - (p - q)$ raumartig

A : beliebiger fastlokaler Operator mit Energie-Impuls-Übertrag $\Gamma \subset \Delta_2$,

$\Delta = (\Delta_q \cap \text{sp } \mathcal{U}) + \Delta_2$,

B : Operator vom BF-Typ

Satz : Die Menge der Vektoren in $\mathcal{D}$ ist dicht in $E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$.

Beweis :

Im ersten Schritt benutzt man ein Ergebnis von [BF 82] :

Die lineare Hülle von $A \cdot \Psi$ ist dicht in $E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$, da sonst ein Vektor $\Phi \in E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$, $\|\Phi\| \neq 0$, existieren müßte, so daß die Fourier-Transformierte von

$x \rightarrow E(\Delta_q \cap \text{sp } \mathcal{U}) \cdot \alpha_x(A) \cdot \Phi$, die den Impulsübertrag von A bestimmt, auf der offenen Menge $-\Delta_2$ für alle fastlokalen Operatoren A verschwindet. Für faktorielle, hier sogar irreduzible, Darstellungen ist dies nur möglich, falls $\text{supp } \Phi \cap \Delta = \emptyset$, was im Widerspruch steht zu $\Phi \in E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$ und $\|\Phi\| \neq 0$.

Im zweiten Schritt bleibt noch zu beweisen, daß für Operatoren B vom BF-Typ die lineare Hülle von $B \cdot E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$ wieder dicht in $E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$ liegt :

Wäre dies nicht der Fall, dann müßte, entsprechend dem ersten Schritt, ein Vektor $\Theta \in E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$, $\|\Theta\| \neq 0$, existieren, so daß die Fourier-Transformierte von

$x \rightarrow E(\Delta \cap \text{sp } \mathcal{U}) \cdot \alpha_x(B) \cdot \Theta$ auf der offenen Menge Δ_Γ verschwindet, für alle Operatoren vom BF-Typ. Wegen der Idealstruktur dieser Operatoren kann man jetzt einen beliebigen Operator C_Γ mit einem minimalen Energie-Impuls-Übertrag Γ einschieben. Da es nach Bedingung i) Operatoren B gibt, mit $E(\Delta) \cdot B \cdot E(\Delta) \neq 0$, und

die Darstellung der Operatoren A irreduzibel ist, führt dies, wie im ersten Schritt, zum Widerspruch mit den Annahmen für Θ .

□.

Für die Analyse der inneren Freiheitsgrade der Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ zu einem festen Impuls $\mathbf{p} = (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p})$ benutzt man nun die Vektoren aus der Domäne $\mathcal{D}$:

Satz :

Für festes $\mathbf{p}$ definiert

$$\langle \Phi | \Psi \rangle_{\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} (\Phi, U(\mathbf{x}) \cdot \Psi), \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{D}$$

ein *Skalarprodukt*.

Zum Beweis (vgl. z.B. [En 75]) :

Die Existenz folgt aus der Definition der Domäne $\mathcal{D}$, da für Vektoren $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}$ gilt :

Lemma :

$$|(\Phi_1, U(\mathbf{x}) \cdot \Phi_2)| \leq c_n \cdot (1 + |\mathbf{x}|)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

da mit $\Phi_i = B_i \cdot A_i \cdot \Psi_i$, $\Psi_i \in E(\Delta_q) \cdot \mathcal{H}$, folgt

$$|(B_1 \cdot A_1 \cdot \Psi_1, U(\mathbf{x}) \cdot B_2 \cdot A_2 \cdot \Psi_2)| \leq |(\Psi_1, [A_1^* \cdot B_1^*, (B_2 \cdot A_2)(\mathbf{x})] \cdot \Psi_2)| + |(\Psi_1, (B_2 \cdot A_2)(\mathbf{x}) \cdot (B_1 \cdot A_1)^* \cdot \Psi_2)|.$$

Der zweite Term verschwindet, da $(B_1 \cdot A_1)^*$ nach Voraussetzung Energie-Impuls in $-(\Delta - \Delta_q)$ überträgt, $(B_1 \cdot A_1)^* \cdot \Psi_2$ also nicht mehr im Spektrum liegt, weil für alle Vektoren $p \in \Delta$, $q \in \Delta_q$ gilt : $q - (p - q)$ raumartig.

Der erste Term ist kleiner als

$$\|\Psi_1\| \cdot \|\Psi_2\| \cdot \|[(B_1 \cdot A_1)^*, (B_2 \cdot A_2)(\mathbf{x})]\| \leq c_n \cdot (1 + |\mathbf{x}|)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

da $(B_i \cdot A_i)$, $i=1,2$, fastlokale Operatoren sind.

Zu beliebigen Vektoren $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}$ kommt man durch die Bildung endlicher Summen.

Speziell folgt daraus, daß $|(\Phi, U(\mathbf{x}) \cdot \Psi)| \in L^1(\mathbf{x})$ ist. Die Fourier-Transformierte von $(\Phi, U(\mathbf{x}) \cdot \Psi)$ existiert also und ist stetig. Wenn man $U(\mathbf{x})$ spektral zerlegt $U(\mathbf{x}) = \int dE_{\mathbf{p}} \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})$, definiert $d\mu_{\mathbf{p}} = (\Phi, dE_{\mathbf{p}} \cdot \Psi)$ ein glattes Maß. Dies benötigt man für den Beweis der Nicht-Negativität der zugehörigen Norm $\|\Psi\|_{\mathbf{p}}$.

Die Linearität und Antilinearität folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)$ in $\mathcal{H}$, die Sesquilinearität $\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathbf{p}} = \overline{\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathbf{p}}}$ aus $U(\mathbf{x})^* = U(-\mathbf{x})$ und den Eigenschaften des Integrals beim Vorzeichenwechsel der

Variablen.

Für die strikte Positivität muß man die Vektoren Ψ noch nach *Äquivalenzklassen* einteilen

$$\Psi_1 \sim \Psi_2, \quad \text{falls} \quad \Psi_1 - \Psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{p})_0,$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{p})_0 = \{ \Psi \in \mathcal{D} : \text{mit } \|\Psi\|_{\mathbf{p}} = 0 \}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist das Skalarprodukt unabhängig vom Repräsentanten bezüglich der Nullklasse :

$$\Psi_1 \sim \Psi_2 \rightarrow |\langle \Phi | \Psi_1 - \Psi_2 \rangle_{\mathbf{p}}| \leq \|\Phi\|_{\mathbf{p}} \cdot \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{\mathbf{p}} = 0 \quad \square.$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}}$ kann man nun über ein Orthogonalisierungsverfahren für festes $\mathbf{p}$ orthogonale Basis-Vektoren Φ_i konstruieren und somit die (wie angenommen endliche) Dimension n der Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ bestimmen, die mit $\mathbb{C}^n$ identifiziert werden

$$\langle \Phi | \Psi \rangle_{\mathbf{p}} = (\tilde{\phi}(\mathbf{p}), \tilde{\psi}(\mathbf{p})), \quad \tilde{\phi}(\mathbf{p}), \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^n$$

Für die Definition einer Basis in einer offenen Umgebung von $\mathbf{p}$ benutzt man folgende Eigenschaften :

Wegen des raschen Abfalls von $|\langle \Phi_i, U(\mathbf{x}) \cdot \Phi_j \rangle|$, für $\Phi_k \in \mathcal{D}$, ist

$$(\tilde{\phi}_i(\mathbf{p}), \tilde{\phi}_j(\mathbf{p})) = \int d^3\mathbf{x} \, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} (\Phi_i, U(\mathbf{x}) \cdot \Phi_j) = E(\mathbf{p})_{ij}$$

eine C^∞ -Funktion in $\mathbf{p}$.

Für das gegebene $\mathbf{p}$ ist $\det E(\mathbf{p})_{ij} = 1$, d.h. in einer offenen Umgebung von $\mathbf{p}$ kann die Determinante nicht plötzlich auf Null springen. Also kann die Dimension der Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ in dieser Umgebung höchstens zunehmen. Da die Dimension der inneren Freiheitsgrade endlich sein soll, gibt es in jeder Umgebung von $\mathbf{p}$ eine offene Menge, auf der die Dimension konstant ist.

Wie schon weiter oben erwähnt, gilt auf Grund der Lokalität sogar, daß fast alle Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ die gleiche Dimension haben [BF 82].

Zum C^∞ -Transport der Orthonormalbasis $\tilde{\phi}_j$ auf eine Umgebung von $\mathbf{p}$ verwendet man Impuls-abhängige Matrizen $S(\mathbf{q}) = E(\mathbf{q})^{-1/2}$, die wie folgt definiert sind :

Für jeden Impuls $\mathbf{q}$ aus einer kleinen Umgebung von $\mathbf{p}$ gilt für die Matrix $E(\mathbf{q})_{ij}$

$$E(\mathbf{q}) = \mathbf{1} - \varepsilon(\mathbf{q}), \quad \varepsilon(\mathbf{q}) \in C^\infty, \quad \|\varepsilon(\mathbf{q})\| < \varepsilon < 1, \quad \text{für } |\mathbf{p} - \mathbf{q}| < \delta$$

Deshalb existiert in dieser Umgebung sowohl das Inverse E^{-1} [Ka 66], als auch die Wurzel $(1 - \epsilon(\vec{q}))^{1/2}$ [RS 72]. Beide sind analytisch in E .

Für
$$\vec{\Psi}_j(\vec{q}) = \sum_i \vec{\phi}_i(\vec{q}) \cdot S(\vec{q})_{ij}$$

gilt :
$$(\vec{\Psi}_i(\vec{q}), \vec{\Psi}_j(\vec{q})) = \delta_{ij}, \quad \forall \vec{q} \in \text{Umgebung von } \vec{p}$$

Die Vektoren $\Phi_k \in \mathcal{D}$ waren definiert als Linearkombinationen von Vektoren der Form : $B \cdot A \cdot \Psi$, wobei B ein Operator vom BF-Typ ist, und $A \cdot \Psi \in E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$. Wie bei der Definition dieser Operatoren erwähnt, kann man für beliebige, glatte Funktionen $g(p)$ fastlokale Operatoren B_g konstruieren, für die gilt

$$B \cdot g(P) \cdot E(\Delta) = B_g \cdot E(\Delta) .$$

Satz :

Die Vektoren Ψ_i bilden eine Orthonormal-Basis für eine offene Umgebung Δ von $\vec{p}$:

$$\int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\vec{x}} (\Psi_i, U(\vec{x}) \cdot \Psi_j) = \delta_{ij}, \quad \text{für } \vec{q} \in \Delta$$

für :
$$\Psi_j = \sum_{k^i} B^{k^i}_{g_{jk}} \cdot A^{k^i} \cdot \Psi^{k^i} \in \mathcal{D}, \quad \text{mit } g_{jk}(q) = (\vec{\phi}_j(\vec{q}), \vec{\phi}_k(\vec{q}))^{-1/2}$$

$$\Phi_k = \sum_i B^{k^i}_i \cdot A^{k^i} \cdot \Psi^{k^i} \in \mathcal{D}$$
 sind hierbei die weiter oben für festes $\vec{p}$ konstruierten orthogonalen Basis-Vektoren in $\mathcal{H}(\vec{p})$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort durch Einsetzen der entsprechenden Definitionen.

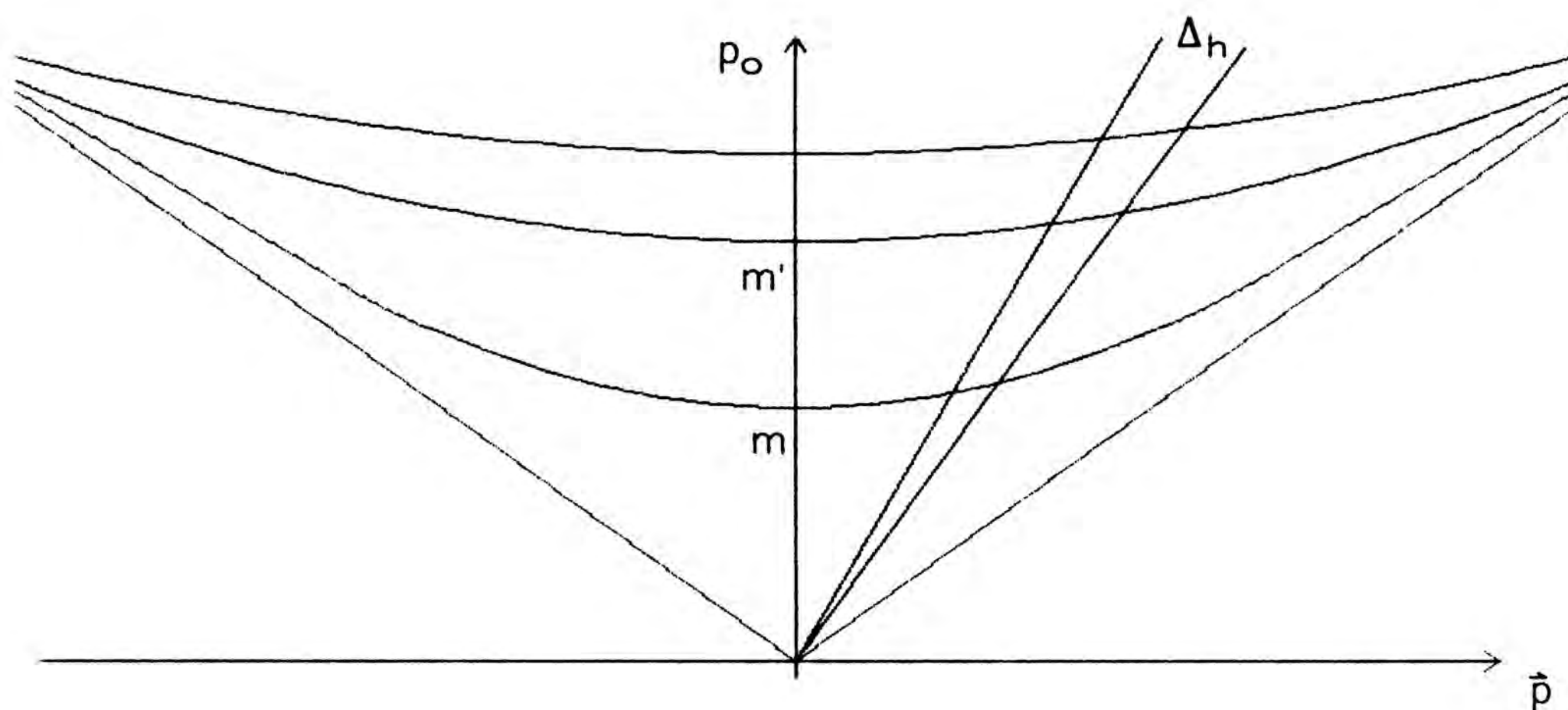
β) Konstruktion der Zähler C

Die gesuchten Zähler C sollen in einer Umgebung Δ von $\vec{p}$ Massen, Ladungen und innere Quantenzahlen separieren.

Als erstes betrachte ich das Problem der **Massen-Separation**.

Der kompakt gewählte Träger von $h(\vec{v})$ legt die Menge $\Delta_h(m)$ der beitragenden Impulse $\vec{p}$ auf einem Massenhypersboloid fest. Für festes m erhält man die Menge

$$\{ p : \vec{p} = m \cdot \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad p_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \vec{v} \in \text{supp } h \}$$



Sei Φ_m ein Ein-Teilchen-Zustand zur Masse m mit Impulsraum-Träger in Δ_h , δ_v der minimale Abstand irgendzweier Massenhypersboloide in Richtung von $\vec{v}$ in $\text{supp } h$. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich die Massenschalen unterhalb des Kontinuums nicht häufen.

Zur Massen-Separation nutzt man die Tatsache aus, daß die Massenhypersboloide zu Impulsen mit verschiedenen Massen aber nahezu gleichen Geschwindigkeiten unterschiedliche Krümmungen besitzen. Die Impuls-Überträge $k \in \Delta$, Δ ein offenes Gebiet im $\mathbf{R}^4$, die der fastlokale Operator B^m , der die Masse m herausseparieren soll, macht, werden entsprechend justiert. Er muß dabei auch den Impuls Null übertragen, speziell $\langle \vec{p}, m, \alpha, i | C | \vec{p}, m, \alpha, j \rangle \neq 0$. Außerdem braucht man später zum Transport der, für festes $\vec{p}$ adjustierten, Zähler auf eine offene $\vec{p}$ -Umgebung spezielle, von D. Buchholz und K. Fredenhagen [BF 82] konstruierte, Operatoren B , die aus Dreifachkommutatoren

$$[B_3(x_3), [B_2(x_2), [B_1(x_1), B_0]]]$$

aufgebaut sind, die Impulse $k_i \in \Delta_i$ übertragen.

Meine Konstruktion weicht leicht von der Konvention in [BF 82] ab, leistet aber ebenfalls das Gewünschte. Speziell kann man auf die gleiche Weise zu den Operatoren B^m die Operatoren B_g^m zu beliebigen glatten Funktionen $g(p)$ konstruieren.

Satz :

Der Operator B^m separiert die Masse m aus Ein-Teilchen-Zuständen Φ_m mit Geschwindigkeitsträger in Δ_h heraus, d.h.

$$B^m \cdot \Phi_{m'} = 0, \quad \text{für } m' \neq m,$$

falls die Impuls-Überträge $k_i \in \Delta_i$ der vier Operatoren B_i , aus denen B^m aufgebaut ist, folgende Bedingungen erfüllen :

Für alle $p \in \Delta_h \cap (\bigcup_{m'} H_{m'})$ gelte :

Wie in [BF 82] werden die k_i so gewählt, daß für $p \in \Delta_h(m)$

$$p + \sum_{i=0}^j k_i \in H_m, \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3$$

Zusätzlich soll der gesamte Operator den Impuls Null übertragen, d.h.

$$p + \sum_{i=0}^3 k_i = p.$$

Für Ein-Teilchen-Zustände mit Träger in $p' \in \Delta_h(m')$ zur Masse $m' \neq m$ soll $B^m \cdot \Phi_{m'}$ Null ergeben

$$p' + k_i \notin \text{sp } \mathcal{U}, \quad \text{für } j = 0, 1, 2, 3$$

und für die ausgewählte Masse m sei

$$p + k_j \notin \text{sp } \mathcal{U}, \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

damit bei Anwendung des Dreifachkommutators auf Φ_m nur der Term $B_3 \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot B_0$ beiträgt.

Der Beweis des Satzes folgt direkt aus den angegebenen Bedingungen an die k_i und der analog [BF 82] definierten Form von B^m .

Speziell kann man als Beispiel für die Erfüllbarkeit der obigen Forderungen folgende Impulsüberträge k_i wählen :

Alle Impulsüberträge $k_i \in \Delta_i$, Δ_i offene Gebiete im $\mathbf{R}^4$, wählt man so klein, daß sie

von Impulsen in Δ_h aus keine Übergänge zwischen den verschiedenen Massenhypersboloiden machen können, aber immer noch aus den Gebieten Δ_h herausführen, um bei den unerwünschten Massen nach Anwendung von B^m zu Gebieten außerhalb des Spektrums zu kommen

$$\delta_h < (|k_1^0| + |\vec{k}_1|) < \delta_v$$

Speziell kann man die Energie-Überträge Null setzen

$$k_1^0 = 0, \quad \text{und somit} \quad \delta_h < |\vec{k}_1| < \delta_v \quad \text{fordern.}$$

Da im letzten Schritt der Konstruktion der $\text{supp } h$ beliebig klein gewählt wird, was sich auf die Größe δ_h des Gebietes Δ_h der beitragenden Impulse überträgt, läßt sich die zweite Bedingung erfüllen.

Falls die Vektoren $p + \sum_{i=0}^j k_i$ für vorgegebenes m aus dem Massenspektrum auf der Massenschale H_m liegen sollen, dann müssen ihre räumlichen Komponenten auf der Oberfläche der Kugel mit Radius $|\vec{p}| = m \cdot |\vec{v}| / \sqrt{1 - v^2}$ liegen.

Der Impulsübertrag $\vec{k}_0$ hat die Aufgabe, die Massen zu separieren

$$p + k_0 \in H_m, \quad \text{für den Impuls } p \text{ zur ausgewählten Masse } m.$$

Da die Kugeln zu verschiedener Masse m verschiedene Krümmungen haben, und der Impulsübertrag durch δ_v beschränkt ist, liegt der Vektor $p + k_0$ für eine andere Masse $m' \neq m$ nicht im Spektrum.

$\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ wählt man in der Tangentialebene an diese Kugel am Punkt $\vec{p}$, deren Lage unabhängig von m alleine durch die Richtung von $\vec{v}$ vorgegeben ist. Deshalb liegen für alle Massen m die Vektoren $p + k_1$ und $p + k_2$ nicht im Spektrum.

$\vec{k}_3$ schließt die Kette $\vec{p} + \sum \vec{k}_i = \vec{p}$, weist also von $\vec{p}$ aus von der Kugel weg. Deshalb liegt $p + k_3$ für beliebige Massen nicht im Spektrum – womit der letzte Teil der Forderungen erfüllt ist.

Diese Eigenschaften können dann auf offene Umgebungen Δ_i der Impulsüberträge k_i übernommen werden.

Da alle B_i einen kleinen Impulsübertrag machen, vernichten sie und ihre Adjungierten das Vakuum. Damit ist B^m ein Zähler.

Die fastlokalen, massen-separierenden Operatoren B vom BF-Typ bilden eine ***-Algebra $\mathcal{C}$** , falls die Impulsüberträge von B wie im obigen Beispiel gewählt wurden, da sowohl die Produkte solcher B als auch B^* wieder die Massen separieren und wegen der Ideal-Struktur Operatoren vom BF-Typ sind. Auch Mehrfachprodukte von B führen von $E(\Delta_h) \cdot \mathcal{H}$ aus nicht aus $E(\Delta_h^\sim) \cdot \mathcal{H}$ heraus, da die Operatoren B Zustände mit Träger außerhalb von Δ_h wegen der unterschiedlichen Krümmung des Hyperboloids vernichten.

So konstruierte Operatoren B können auch zur **Analyse des Massenspektrums**

verwendet werden. Dazu wählt man den $\text{supp } h$ genügend klein, um Übergänge zwischen den Massenschalen zu vermeiden, und testet das Ansprechverhalten der Operatoren $B(\hat{v}, m)$ auf beliebige Zustände, wobei man die Richtung $\hat{v}$ und den Massenparameter m variiert.

Die Zähler, die **Ladungen** und **innere Quantenzahlen** separieren sollen, konstruiert man, ausgehend von den Massenseparations-Operatoren B^m , als erstes auf den im vorherigen Abschnitt definierten Räumen $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ zu festem Impuls $\mathbf{p}$ und Masse m .

Die betrachteten Vektoren Φ, Ψ seien aus der direkten Summe der weiter oben definierten Domänen $\mathcal{D}$, die zu der direkten Summe der irreduziblen Ein-Teilchen-Darstellungen $(\pi_h, \mathcal{H})$ gehören : $\{ \Phi : \Phi = B \cdot A \cdot \Psi, \Psi \in E(\Delta_q) \cdot \mathcal{H} \}$

Dabei wählt man den räumlichen Betrag der Impulse q in Δ_q so groß, daß die massen-separierenden Zähler C die zu Δ_q gehörenden Zustände vernichten, da dort die Krümmung der Kugeln zu dem Massen-Hyperboloid zu klein ist,

$$C \cdot E(\Delta_q) \cap \text{sp } \mathcal{U} = \emptyset .$$

Dies ist kompatibel zu der Forderung, daß $q - (p - q)$ raumartig liegt, für $p \in \Delta$, falls man $|\mathbf{q}|$ nur genügend groß wählt.

Lemma :

$$\| C \cdot U(\mathbf{x}) \cdot \Phi \| < c_n \cdot (1 + |\mathbf{x}|)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \Phi \in \mathcal{D}, \quad C \in \mathcal{C}$$

Beweis :

Mit $\Phi = \sum B \cdot A \cdot \Psi, \Psi \in E(\Delta_q)$, folgt direkt

$$\| C \cdot U(\mathbf{x}) \cdot \Phi \| \leq \sum \| [C(\mathbf{x}), (B \cdot A)] \| \cdot \|\Psi\| + \| B \cdot A \cdot C(\mathbf{x}) \cdot \Psi \|^2$$

Der zweite Term verschwindet wegen der oben angegebenen Adjustierung des Gebietes Δ_q , und der erste Term zeigt das gewünschte Abfallverhalten, da C und $(B \cdot A)$ fastlokale Operatoren sind.

□ .

Satz :

$$(\tilde{\phi}(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(C) \cdot \tilde{\psi}(\mathbf{p})) = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}+\mathbf{y})} (\Phi, U(\mathbf{x}) \cdot C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Psi)$$

definiert eine **positive Abbildung** der Zähler $C \in \mathcal{C}$ in die Operatoren $M_{\mathbf{p}}(C)$ in $\mathbb{C}^n$.

Beweis :

Die Definition ist sinnvoll,

da mit Hilfe der Polarzerlegung $C = V \cdot |C|$ gilt

$$|(\Phi, U(\mathbf{x}) \cdot C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Psi)|^2 \leq \| |C|^{1/2} \cdot V \cdot U(\mathbf{x})^* \cdot \Phi \|^2 \cdot \| |C|^{1/2} \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Psi \|^2 \leq \\ \leq \| \Phi \|^2 \cdot \| C^* \cdot U(-\mathbf{x}) \cdot \Phi \|^2 \cdot \| \Psi \|^2 \cdot \| C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Psi \|^2 \leq \dots \leq c \cdot |\mathbf{x}|^{-n} \cdot |\mathbf{y}|^{-n} ,$$

die Fourier-Transformierte also existiert,

und unabhängig vom Repräsentanten bezüglich der Nullklasse :

Sei $\Phi_0 \in \mathcal{D}_0$, also $\| \Phi_0 \|_{\mathbf{p}} = 0$. Für $\Phi \in \mathcal{D}$ und $C \in \mathcal{C}$ gilt

Lemma :

$$\Phi_C = \int d^3\mathbf{y} \, e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}} \cdot C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Phi \in \mathcal{D} ,$$

da $C(\mathbf{y}) \cdot \Phi = [C(\mathbf{y}), B \cdot A] \cdot \Psi$ rasch abfällt und C ein Operator vom BF-Typ ist, der nur einen minimalen Impuls-Übertrag macht.

Aus der Dreiecksungleichung für das Skalarprodukt folgt nun die Repräsentanten-Unabhängigkeit

$$| \langle \Phi_0, \Phi_C \rangle_{\mathbf{p}} | \leq \| \Phi_0 \|_{\mathbf{p}} \cdot \| \Phi_C \|_{\mathbf{p}} = 0 .$$

Die Abbildung $M_{\mathbf{p}}$ ist linear, und $M_{\mathbf{p}}(C^*) = M_{\mathbf{p}}(C)^*$ gilt wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts. $M_{\mathbf{p}}$ ist semi-positiv, da

$$(\tilde{\Psi}(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(C^* \cdot C) \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{p})) = (\Psi_C, \Psi_C) \geq 0$$

□ .

Da $\Phi_C \in \mathcal{D}$ ist, gelten analoge Aussagen für beliebige Produkte der $M_{\mathbf{p}}(C)$:

$$(\tilde{\Phi}(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(C_1) \cdot M_{\mathbf{p}}(C_2) \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{p})) = \int d^3\mathbf{x} \, d^3\mathbf{y} \, d^3\mathbf{z} \, e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})} (\Phi, U(\mathbf{x}) C_1 U(\mathbf{y}) C_2 U(\mathbf{z}) \Psi)$$

Satz :

Es existieren massen-separierende Zähler $C \in \mathcal{C}$ vom BF-Typ, so daß

$$\langle \mathbf{p}, m, a | C | \mathbf{p}, m, a \rangle = (\tilde{\Phi}_a(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(C) \cdot \tilde{\Phi}_a(\mathbf{p})) \neq 0 , \quad \text{für } \mathbf{p} \in \Delta .$$

Beweis :

Für $p = (\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}) \in \Delta$ gilt: Es gibt $C \in \mathcal{C}$, so daß $C \cdot E(\Delta) \neq 0$.

Der Beweis hierzu läuft analog zu dem Beweis in [BF 82] für $B \cdot E(\Delta) \neq 0$, der ausnutzt, daß es Zähler B_i mit vorher adjustierten Impulsüberträgen Γ_i geben muß, so daß $B_3 \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot B_0 \cdot E(\Delta) \neq 0$. Meine Konstruktion unterscheidet sich davon nur in einer etwas anderen Wahl der Impulsüberträge Γ_i , was aber für den Beweis irrelevant ist.

Die Impulsüberträge Γ_i hatte ich so klein gewählt, daß $C \cdot |\vec{p}, m, a\rangle$ wieder in einer Umgebung von $\vec{p}$ auf der gleichen Massenschale liegt. Wegen der obigen Aussage existiert also eine offene Umgebung Δ_q für Vektoren q auf H_m , mit

$$\langle \vec{q}, m, b | C | \vec{p}, m, a \rangle \neq 0.$$

Wegen der Ideal-Struktur von $\mathcal{C}$ ist $C^* \cdot C$ wieder ein massen-separierender Zähler vom BF-Typ, für den gilt

$$\langle \vec{p}, m, a | C^* \cdot C | \vec{p}, m, a \rangle = \sum_b \int_{\Delta_q} d^3 \vec{q} |\langle \vec{q}, m, b | C | \vec{p}, m, a \rangle|^2 \neq 0.$$

□.

Satz : $M_{\vec{p}}(\mathcal{C})$ bildet eine $*$ -Algebra.

Beweis :

Die lineare Struktur folgt sofort aus der Linearität des Skalarproduktes und der Tatsache, daß $\mathcal{C}$ eine Algebra ist.

Zum Beweis von $M_{\vec{p}}(\mathcal{C}) \cdot M_{\vec{p}}(\mathcal{C}) \subset M_{\vec{p}}(\mathcal{C})$ betrachtet man die Abbildung von Folgen fastlokaler Zähler in $\mathcal{C}$

$$C(V_i) = \int_{V_i} d^3 \vec{z} C_1 \cdot C_2(\vec{z}), \quad V_i : (\text{immer größer werdende}) \text{ endliche Gebiete im } \mathbf{R}^3,$$

$$(\vec{\varphi}(\vec{p}), M_{\vec{p}}(C(V)) \cdot \vec{\psi}(\vec{p})) = \int_V d^3 \vec{z} e^{i \vec{p} \cdot \vec{z}} (\Phi_1, U(\vec{z}) \cdot \Psi_2) \text{ konvergiert im Limes } V \rightarrow \mathbf{R}^3,$$

$$\text{mit } \Phi_1 = \int d^3 \vec{x} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} C_1^* \cdot U(\vec{x}) \cdot \Phi, \quad \Psi_2 = \int d^3 \vec{y} e^{i \vec{p} \cdot \vec{y}} C_2 \cdot U(\vec{y}) \cdot \Psi,$$

und ergibt die oben definierte Produktabbildung $(\vec{\varphi}(\vec{p}), M_{\vec{p}}(C_1) \cdot M_{\vec{p}}(C_2) \cdot \vec{\psi}(\vec{p}))$, da

$$\begin{aligned} & \left| \int_V d^3 \vec{z} e^{i \vec{p} \cdot \vec{z}} (\Phi_1, U(\vec{z}) \cdot \Psi_2) - (\vec{\varphi}(\vec{p}), M_{\vec{p}}(C_1) \cdot M_{\vec{p}}(C_2) \cdot \vec{\psi}(\vec{p})) \right| = \\ & = \left| \int_{\mathbf{R}^3 - V} d^3 \vec{z} e^{i \vec{p} \cdot \vec{z}} (\Phi_1, U(\vec{z}) \cdot \Psi_2) \right| \rightarrow 0, \quad \text{für } V \rightarrow \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\mathcal{M} = \{ M \in \mathcal{N} : M = M_{\vec{p}}(C) \}, \quad \mathcal{N}: \text{lin. Abbildungen in } \mathbf{C}^n,$$

als linearer Unterraum vollständig. Deshalb liegt die konvergente Folge $M_{\mathbf{p}}(C(v))$ der Matricelemente in einer kompakten Teilmenge von $\mathcal{M}$. Da darin $M_{\mathbf{p}}(C(v))$ gegen $M_{\mathbf{p}}(C_1) \cdot M_{\mathbf{p}}(C_2)$ konvergiert, gehört dazu auch ein $C \in \mathcal{C}$, so daß

$$M_{\mathbf{p}}(C_1) \cdot M_{\mathbf{p}}(C_2) = M_{\mathbf{p}}(C) .$$

Die Existenz des Adjungierten $M_{\mathbf{p}}(C)^* \in \mathcal{M}$ folgt wegen $C^* \in \mathcal{C}$ und aus der Sesquilinearität des Skalarprodukts. $\square$

Leider ist es nicht gelungen, dieses C explizit zu konstruieren.

Für den *Kommutator* zweier Abbildungen, der auf die zugehörige Lie-Algebra führt, kann man aber den zugehörigen Zähler angeben

$$M_{\mathbf{p}}(C_{[a,b]}) = [M_{\mathbf{p}}(C_a) , M_{\mathbf{p}}(C_b)]$$

$$\text{mit } C_{[a,b]} = \int d^3\mathbf{x} [C_a , C_b(\mathbf{x})] \in \mathcal{C}$$

Wegen der endlichen Zahl der Freiheitsgrade der Räume $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ bilden die Operatoren $M_{\mathbf{p}}(C)$ in $\mathbb{C}^n$ eine W^* -Algebra vom Typ I. Folgende Theoreme [siehe z.B. Sa 71] geben Auskunft über ihre Struktur :

Theorem : Eine Typ I - W^* -Algebra $\mathcal{M}$ kann eindeutig in eine direkte Summe von Typ I_n - W^* -Algebren $\mathcal{M}_n$, $n \in K$ zerlegt werden, wobei K eine Familie von wechselseitig disjunkten ganzen Zahlen ist.

Theorem : Sei $\mathcal{M}$ eine Typ I_n - W^* -Algebra (n eine ganze Zahl) und $\mathcal{Z}$ das Zentrum von $\mathcal{M}$, dann ist $\mathcal{M}$ $*$ -isomorph zu $\mathcal{Z} \otimes B(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = n$.

Hier habe ich angenommen, daß man nach der zentralen Zerlegung von σ_n direkte Summen von irreduziblen Darstellungen erhält.

Satz : Falls $\mathcal{C}$ irreduzibel in $\mathcal{H}$ wirkt, dann ist $M_{\mathbf{p}}(\mathcal{C})$ irreduzibel in $\mathcal{M}$.

Beweis :

Sei Φ_1 beliebig vorgegeben, aber nicht aus der Nullklasse.

Zu beweisen ist, daß falls $(\hat{\Phi}_2(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(C) \cdot \hat{\Phi}_1(\mathbf{p})) = 0$, $\forall C \in \mathcal{C}$, folgt, daß Φ_2 aus der Nullklasse ist.

Dazu wähle ich Zähler der Form $C = A_2^* \cdot A \cdot A_1$, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, mit minimalem Impulsübertrag. Falls A einen genügend kleinen Impulsübertrag macht, dann ist auch $C \in \mathcal{C}$.

Es existiert ein A_1 , so daß $\Theta_1 = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} A_1 \cdot U(\mathbf{x}) \cdot \Phi_1$ normierbar und ungleich Null in $\mathcal{D}$ ist, da $\Phi_1 = \sum B_i \cdot A_i \cdot \Psi_i$ nicht aus der Nullklasse sein soll, also

$$0 < \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} (\Phi_1, U(\mathbf{x}) \Phi_1) = \sum_i (A_i \cdot \Psi_i, \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} B_i^* \cdot U(\mathbf{x}) \cdot \Phi_1)$$

Da nicht alle Summanden verschwinden können, existiert mindestens ein $B_i = A_1$, so daß $\Theta_1 \neq 0$.

Falls andererseits Φ_2 nicht aus der Nullklasse wäre, dann existiert analog ein A_2 , so daß $\Theta_2 = \int d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}} A_2 \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Phi_2$ ein von Null verschiedener Vektor ist.

Da nach Voraussetzung in $\mathcal{H}$ die Algebra $\mathcal{C}$ irreduzibel wirkt, existiert ein A , dessen Impulsübertrag klein ist, da $\Theta_1, \Theta_2 \in E(\Delta) \cdot \mathcal{H}$, so daß

$$0 \neq (\Theta_2, A \cdot \Theta_1) = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}+\mathbf{y})} (\Phi_2, U(\mathbf{x}) \cdot C \cdot U(\mathbf{y}) \cdot \Phi_1),$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Φ_2 muß also aus der Nullklasse sein – was zu beweisen war.

□.

Da die Algebra $\mathcal{C}$ äquivalent zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen ist, zerfällt die mit Hilfe der Basis $\tilde{\Psi}_i(\mathbf{p})$, $i = 1, \dots, n$, erhaltene Matrix-Algebra

$$M_{\mathbf{p}}(\mathcal{C})_{ij} = (\tilde{\Psi}_i(\mathbf{p}), M_{\mathbf{p}}(\mathcal{C}) \cdot \tilde{\Psi}_j(\mathbf{p}))$$

in Blöcke irreduzibler Darstellungen auf $\mathcal{H}(\mathbf{p})$, die zu den einzelnen Superauswahl-Sektoren gehören.

Sind die Darstellungen für festes $\mathbf{p}$ untereinander inäquivalent, dann existieren $L = \sum n_i^2$ (n_i : Dimension der einzelnen Blöcke, $\sum n_i = n$) linear unabhängige Matrizen zu Zählern B^λ , aus denen man durch Linearkombinationen Matrizen bilden kann, deren Matrix-Elemente jeweils nur in einem Block von Null verschieden sind, und die für diesen Block Matrix-Einheiten E^{ij} bilden (Satz von Burnside, vgl. [FS 06]), d.h. $E^{ik} \cdot E^{lm} = \delta_{kl} \cdot E^{lm}$, $E^{ij*} = E^{ji}$.

Zur Vereinfachung der Notation fasse ich die Komponenten i, j , die zu nichtverschwindenden Matrixelementen innerhalb der Blöcke gehören, zum Multiindex $l = (i, j)$ zusammen, den ich anordne $l = 1, \dots, L$.

Das Maß für die lineare Unabhängigkeit der Zähler B^λ für festes $\mathbf{p}$ ist die Determinante über die Indizes l und λ : $\det [M_{\mathbf{p}}(B^\lambda)_l] \neq 0$

Die Determinante ist C^∞ in $\mathbf{p}$, dh. in einer Umgebung von $\mathbf{p}$ kann die Zahl der Freiheitsgrade wie im Fall der Basis $\tilde{\Phi}_i$ höchstens zunehmen. Wegen der endlichen Zahl der Freiheitsgrade gibt es zu jeder Umgebung von $\mathbf{p}$ eine offene Menge, auf der die Zahl konstant ist.

So läßt sich über das Determinanten-Kriterium die Zahl L der unabhängigen Frei-

heitsgrade und die Blockstruktur der Matrix-Algebra in einer Umgebung von $\tilde{\mathfrak{p}}$ testen und mit der aus der Konstruktion der Basis $\tilde{\varphi}_i$ gewonnenen Superauswahl-Struktur vergleichen. Falls die Zahl der Freiheitsgrade kleiner ist als erwartet, hat man entweder Superauswahl-Regeln übersehen, was man an der Blockstruktur erkennt, oder einige der Darstellungen sind äquivalent. Im letzteren Fall müssen sie auch in einer offenen Umgebung von $\tilde{\mathfrak{p}}$ äquivalent bleiben. Man kann diese Darstellungen in Klassen zusammenfassen und die nachfolgende Konstruktion der gesuchten Zähler für einen beliebigen Repräsentanten durchführen.

Satz : Die Zähler

$$E^I = \sum_{\lambda=1}^L g^I(\mathfrak{p})_{\lambda} \cdot B^{\lambda} \quad , \quad I = (i, j)$$

$$\text{mit } g^I(\mathfrak{p})_{\lambda_I} = \left[\sum_{\substack{\{\lambda_j\} \\ j \neq I}} \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_I \dots \lambda_L} \cdot M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(B^{\lambda_1})_1 \cdot \dots \cdot M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(B^{\lambda_{I-1}})_{I-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(B^{\lambda_{I+1}})_{I+1} \cdot \dots \cdot M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(B^{\lambda_L})_L \right] / \det [M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(B^{\lambda})_I] \quad ,$$

wirken in den Blöcken zu irreduziblen Darstellungen als Matrix-Einheiten, und ihre Matrix-Elemente verschwinden in allen anderen Blöcken zu dazu inäquivalenten Darstellungen, d.h.

$$M_{\tilde{\mathfrak{p}}}(E^I)_k = \delta_{Ik} \quad .$$

Für äquivalente Darstellungen gilt dies für die gesamte Klasse.

Beweis :

Der erste Teil des Satzes ergibt sich direkt durch Einsetzen der Definitionen.

Seien zwei Darstellungen π_1, π_2 äquivalent, d.h. es existiert eine unitäre Matrix U , mit $\pi_1(C) = U \cdot \pi_2(C) \cdot U^*$. Falls $\pi_2(E^I)$ Matrix-Einheiten darstellen, also $\pi_2(E^{Ik}) \cdot \pi_2(E^{Im}) = \delta_{kI} \cdot \pi_2(E^{Im})$, $\pi_2(E^I)^* = \pi_2(E^I)$, dann sind $\pi_1(E^I)$ ebenfalls Matrix-Einheiten, da

$$\pi_1(E^{Ik}) \cdot \pi_1(E^{Im}) = U \cdot \pi_2(E^{Ik} \cdot E^{Im}) \cdot U^* = U \cdot \delta_{kI} \cdot U^* \cdot U \cdot \pi_2(E^{Im}) \cdot U^* = \delta_{kI} \cdot \pi_1(E^{Im}) \quad ,$$

$$\pi_1(E^I)^* = (U \cdot \pi_2(E^I) \cdot U^*)^* = U \cdot \pi_2(E^I)^* \cdot U^* = \pi_1(E^I) \quad .$$

□ .

Für festen Impuls $\tilde{\mathfrak{p}}$ ist damit das Problem der Konstruktion der gewünschten Zähler gelöst. Speziell findet man so Operatoren, die auf die einzelnen Ladungs-Sektoren projizieren.

Um letztendlich zu den gesuchten Zählern in einer ganzen offenen Umgebung Δ von $\tilde{\mathfrak{p}}$ zu kommen, benutzt man die Tatsache, daß die verwendeten Operatoren B^{λ} Zähler vom BF-Typ sind :

Satz :

Die massen-separierenden Zähler vom BF-Typ $C^I = \sum_{\lambda} B^I_{g^I \lambda}$, $I = (i, j)$,

wirken in einer offenen Umgebung Δ von $\tilde{\mathbf{p}}$ in den Blöcken zu irreduziblen Darstellungen als Matrix-Einheiten, und ihre Matrix-Elemente verschwinden für alle anderen Blöcke zu dazu inäquivalenten Darstellungen.

Für die Klassen von äquivalenten Darstellungen ist dies unabhängig vom Repräsentanten.

Der Beweis ergibt sich durch direktes Einsetzen der Definitionen unter Berücksichtigung von

$$\sum_{\lambda} B^{\lambda} \cdot g^I(P)_{\lambda} E(\Delta) = \sum_{\lambda} B^{\lambda}_{g^I \lambda} \cdot E(\Delta) = C^I \cdot E(\Delta) .$$

Für in der gesamten Umgebung Δ von $\tilde{\mathbf{p}}$ äquivalente Darstellungen hebt sich die $\tilde{\mathbf{p}}$ -Abhängigkeit auf.

E : Schlußbemerkungen

In Teil C wurde gezeigt, daß das hier vorgeschlagene Konstruktionsverfahren im Fall massiver, asymptotisch vollständiger Theorien mit lokalisierbaren Ladungen funktioniert. Ein analoger Beweis sollte auch für massive, lokale Eichtheorien mit stringartig lokalisierbaren Ladungen möglich sein, im Rahmen der Untersuchungen von D. Buchholz und K. Fredenhagen [BF 82] .

Interessanter ist die Frage, ob die Konstruktion auch bei Existenz von Masse-Null-Teilchen im geladenen Sektor mit Infra-Teilchen greift.

In den Thesen zu der in Teil A beschriebenen Konstruktion wurde nirgends explizit die Voraussetzung gemacht, daß nur massive Teilchen vorhanden sind.

Wie schon erwähnt, bewies D. Buchholz, daß die Araki-Haag-Limiten auch im Falle von Infra-Teilchen immer (evtl. mehrere) Limespunkte für asymptotische Zeiten haben, die als uneigentliche Ein-Teilchen-Zustände interpretiert werden können.

Um dies zur Präparation von Teilchen-Zuständen zu verwenden, muß man allerdings noch die Konvergenz der Operatoren $C(t;h)$ für asymptotische Zeiten beweisen.

Die These, die die Existenz der Araki-Haag-Limiten fordert, ist der Angelpunkt der gesamten Konstruktion – zusammen mit der Forderung, daß das Limesfunktional σ_h auch alle im Zustand ω asymptotisch auftretenden Teilchentypen enthält. Nur so kann man auch beliebige Streuzustände konstruieren.

Direkte Rechnungen im Schroer-Modell [Sc 63] zeigen, daß zumindest in einfachen Infra-Teilchen-Modellen die Limiten existieren [Bu 86a] .

Für eine weitere Erhellung dieses Problemkreises wäre es interessant, das Verfahren an realistischeren Modellen zu testen, in denen es für die Observablen im Ge-

gensatz zum Schroer-Modell keine Darstellung mit diskreten Ein-Teilchen-Zuständen gibt. Mögliche Kandidaten dafür sind integrable QED-ähnliche Modelle in 2 oder 4 Dimensionen, in denen Fermi-Felder an äußere Photon-Felder koppeln.

Für die Konstruktion der Zähler, die die einzelnen Teilchenzustände herausprojizieren, hatte ich für massive Theorien mit lokalisierbaren Ladungen die Tatsache ausgenutzt, daß die Massenhypersphäre vom Rest des Spektrums getrennt sind. Dies ist bei der Existenz von masselosen Teilchen nicht mehr der Fall. Speziell sind Infrateilchen keine Eigenzustände zum Massenoperator [Bu 86 b], zu den Räumen $\mathcal{H}(\vec{p})$ bei festem Impuls $\vec{p}$ gehört nicht mehr eine feste Energie. Die Zähler registrieren aber immer noch eine gewisse Mindestenergie, falls das ausgesuchte Teilchen massiv ist, also in einem Sektor mit Massenspalz liegt. Die massiven Ein-Teilchen-Zustände am unteren Ende des Spektrums in einem geladenen Sektor sollten deshalb in den Limiten durch eine Energiebegrenzung von anderen massiven Zuständen zu unterscheiden sein. Bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte muß man sich dann auf die Betrachtung inklusiver Prozesse beschränken, wobei man Zustände konstruiert, die die gewünschten Teilchen enthalten, aber zusätzlich noch eine beliebig große Menge von Masse-Null-Teilchen mit sehr kleiner Energie. Ähnliche Probleme hat man aber auch im Rahmen der konventionellen Behandlung [JR 76], vgl. auch das Bloch-Nordsieck-Modell [BN 37], bzw. in Experimenten durch das begrenzte Auflösungsvermögen der Detektoren.

Ein weiteres Problem ist die These, daß die zusätzlichen durch die Zähler A_μ fixierten Teilchen um Grenzübergang $|\vec{a}_\mu| \rightarrow \infty$ für sich clustern und deshalb aus dem Funktional abseparieren, da im Masse-Null-Fall im Vakuum-Sektor keine Massenspalz existiert.

Direkte Anwendungen des vorgeschlagenen Konstruktionsverfahrens sehe ich, wie schon erwähnt, in der Möglichkeit der Erzeugung von geladenen Teilchenzuständen auch in nicht-abelschen Eichtheorien, wo die Konstruktion ladungstragender Felder kompliziert ist.

Zu den Aussagen, die das Konstruktionsverfahren liefern kann, gehört der Test der Existenz geladener Sektoren in einem vorgegebenen Modell.

Dazu muß man z.B. bei der Suche nach geladenen Sektoren mit Ein-Teilchen-Darstellungen als erstes das Massenspektrum des Modells analog der Vorschriften von Kapitel B untersuchen. Danach bestimmt man die Superauswahl-Struktur bei festem $\vec{p}$ und konstruiert die Operatoren, deren Formfaktoren auf die gewünschten Ladungen projizieren. Mit ihnen kann man jetzt den zugehörigen Ein-Teilchen-Zustand konstruieren. Durch die GNS-Konstruktion erhält man dazu eine Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$. Falls diese zur Vakuum-Darstellung inäquivalent ist, dann befindet sich

der präparierte Zustand in einem geladenen Sektor.

Dies könnte z.B. bei dem Problem der Erzeugung von Teilchenzuständen in einer Gitter-Eichtheorie im Rahmen von Untersuchungen interessant sein, wie sie u.a. von K. Fredenhagen und M. Marcu [FM 83] und J.C.A. Barata und K. Fredenhagen [BF 87] durchgeführt wurden.

Liste der Abkürzungen

Metrik im Minkowski-Raum : $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$

$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$: $\mathcal{O}_1$ raumartig zu $\mathcal{O}_2$

$\bar{V}_+$: abgeschlossener Vorwärtslichtkegel

H_m : Ein-Teilchen-Hyperboloid zur Masse m

$E(\Delta)$: Projektor auf offenes Energie-Impuls-Gebiet Δ

$\pi(\mathcal{A})^-$: schwacher Abschluß von $\pi(\mathcal{A})$

$\pi(\mathcal{A})'$: Kommutante von $\pi(\mathcal{A})$

A^* : Adjungiertes zu A

$\bar{f}$: konjugiert komplexe Funktion zu f

$\tilde{f}$: Fourier-Transformierte zu f

$\mathcal{D}$: Menge der C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger

$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\dots}$: total anti-symmetrischer Tensor

$\int \prod_{\nu=1}^n d^3\vec{p}_\nu$: Mehrfach-Integration über die Impulse $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$

$\sum_{\text{Perm}}$: Summe über alle Permutationen der Indizes

$\sum_{\{\alpha\}}$: Mehrfach-Summen über das Index-Tupel $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$\sum_{\text{endl.}}$: Summe über endlich viele Elemente

Literaturverzeichnis

- [AH 67] H. Araki, R. Haag : Collision cross sections in terms of local observables
Commun. Math. Phys. **4**, 77 (1967)
- [BB 85] H. J. Borchers, D. Buchholz : The energy-momentum spectrum in local
field theories with broken Lorentz-symmetry,
Comm. Math. Phys. **97**, 169 (1985)
- [BLR 85] D. Buchholz, J. T. Łopuszański, Sz. Rabsztyn : Non-local charges in local
quantum field theory,
Nucl. Phys **B 363**, 155 (1985)
- [BF 79] D. Buchholz, K. Fredenhagen : Charge screening and mass spectrum in
abelian gauge theories,
Nucl. Phys. **B 154**, 226 (1979)
- [BF 82] D. Buchholz, K. Fredenhagen : Locality and the structure of particle states
Commun. Math. Phys. **84**, 1, (1982)
- [BF 87] J.C.A. Barata, K. Fredenhagen : Charged particles in $\mathbb{Z}_2$ -gauge theories
Commun. Math. Phys. **113**, 403 (1987)
- [BN 37] F. Bloch, A. Nordsieck : Note on the radiation field of the electron
Phys. Rev. **52**, 54 (1937)

- [Bo 65] H. J. Borchers : On the vacuum state in quantum field theory
Commun. Math. Phys. **1**, 57 (1965)
- [Bo 85] H. J. Borchers : Locality and covariance of the spectrum
Fizika **17**, 289 (1985)
- [Bu 74] D. Buchholz : Haag-Ruelle approximation of collision states
Commun. Math. Phys. **36**, 243 (1974),
Threshold singularities of the S-matrix and convergence of
Haag-Ruelle approximations
Commun. Math. Phys. **39**, 221 (1974)
- [Bu 77] D. Buchholz : Collision theory for massless bosons
Commun. Math. Phys. **52**, 147 (1977)
- [Bu 82] D. Buchholz : The physical state space of quantum electrodynamics
Commun. Math. Phys. **85**, 49 (1982)
- [Bu 86a] D. Buchholz : On particles, infraparticles, and the problem of asymptotic
completeness,
in : VIII th Int. Congr. on Math. Phys., Marseille (1986)
- [Bu 86b] D. Buchholz : Gauss' law and the infraparticle problem
Phys. Lett. **B 174**, 331 (1986)
- [Bu 89] D. Buchholz : Harmonic analysis of local operators
Preprint (1989)
- [DHR 71,74] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts : Local observables and particle
statistics I / II ,
Commun. Math. Phys. **23**, 199 (1971) ,
Commun. Math. Phys. **35**, 49 (1974)
- [En 75] V. Enß : Characterization of particles by means of local observables
Comm. Math. Phys. **45**, 35 (1975)
- [FM 83] K. Fredenhagen, M. Marcu : Charged states in $\mathbb{Z}_2$ - gauge theories
Commun. Math. Phys. **92**, 81 (1983)

- [Fr 85] K. Fredenhagen : A remark on the cluster theorem
Comm. Math. Phys. **97**, 461 (1985)

- [FS 06] G. Frobenius, I. Schur : Über die Äquivalenz der Gruppen linearer
Substitutionen,
Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., 209 (1906)

- [Ha 58] R. Haag : Quantum field theories with composite particles and asymptotic
conditions,
Phys. Rev. **112**, 669 (1958)

- [He 65] K. Hepp : On the connection between Wightman and LSZ quantum field th.
in: Brandeis Univ. Summer Inst. in Theor. Phys. **1**, 135 (1965)

- [HK 64] R. Haag, D. Kastler : An algebraic approach to field theory
J. Math. Phys. **5**, 848 (1964)

- [IZ 80] C. Itzykson, J.-B. Zuber : Quantum Field Theory
New York, ... : Mc Graw-Hill (1980)

- [JR 76] J.M. Jauch, F. Rohrlich : The theory of photons and electrons
New York, Heidelberg, Berlin : Springer (1976)

- [Ka 57] R. V. Kadison : Irreducible operator algebras
Proc. Nat. Acad. Sci. USA **273** (1957)

- [Ka 66] T. Kato : Perturbation theory for linear operators
Berlin, Heidelberg, New York : Springer (1966)

- [LSZ 55, 57] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann : Zur Formulierung
quantisierter Feldtheorien,
Nuovo Cim. **1**, 205 (1955)
On the formulation of quantized field theories
Nuovo Cim. **6**, 319 (1957)

- [MS 85] G. Morchio, F. Strocchi : Infrared problem, Higgs phenomenon and long
range interactions,
in: Fund. probl. of gauge field th., Erice Lect. Notes (1985)

- [Qu 76] B. v. Querenburg : Mengentheoretische Topologie
Berlin, Heidelberg, New York : Springer (1976)

- [Ri 69] M. Rinke : A remark on asymptotic completeness of local fields
Comm. Math. Phys. **12**, 324 (1969)

- [RS 72] M. Reed, B. Simon : Methods of modern mathematical physics I
New York, S. Francisco, London : Acad. Press (1972)

- [Ru 62] D. Ruelle : On the asymptotic condition in quantum field theory
Helv. Phys. Acta **35**, 147 (1962)

- [Sa 71] S. Sakai : C^* -algebras and W^* -algebras
Berlin, Heidelberg, New York : Springer (1971)

- [Sc 63] B. Schroer : Infrateilchen in der Quantenfeldtheorie
Fortschr. Physik **11**, 1 (1963)

- [St 74] O. Steinmann : Scattering of infraparticles
Fortschr. Physik **22**, 367 (1974)

- [St 85] O. Steinmann : Gauge invariant fields in nonabelian gauge theories
Helv. Phys. Acta **58**, 995 (1985)

- [We 83] B. Weeks : Cross sections from observable fields
Phys. Rev. **D 27**, 1340 (1983)

Dank

Herrn Prof. Dr. D. BUCHHOLZ möchte ich herzlich für die Anregung zur Bearbeitung des Themas und die intensive Betreuung während der Arbeit danken.

Ebenfalls danke ich Herrn Dr. H. W. WIESBROCK für interessante Diskussionen und das Lesen der Vorversion der Arbeit.

Für die finanzielle Unterstützung während eines Teils der Arbeit durch ein Promotions-Stipendium nach dem Hamburgischen Gesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses (HmbNFG) danke ich der STADT HAMBURG.